

317471

# **Alkalmazott matematikai lapok**

**1994–1998**

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK  
OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

# **18.**

**KÖTET**

# ALKALMAZOTT MATEMATIKAI LAPOK

## A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK KÖZLEMÉNYEI

ALAPÍTOTTÁK

KALMÁR LÁSZLÓ, TANDORI KÁROLY, PRÉKOPA ANDRÁS, ARATÓ MÁTYÁS

FŐSZERKESZTŐ

BENCZÜR ANDRÁS

FŐSZERKESZTŐ-HELYETTESEK

DEMETROVICS JÁNOS, FARKAS MIKLÓS

FELELŐS SZERKESZTŐ

SZÁNTAI TAMÁS

A SZERKESZTŐBIZOTTSÁG TAGJAI

Arató Mátyás, Csirik János, Csiszár Imre, Galántai Aurél, Gécseg Ferenc, Gyires Béla, Györfy László, Harnos Zsolt, Hatvani László, Heppes Aladár, Kátai Imre, Katona Gyula, Kis Ottó, Klafszy Emil, Kovács Margit, Lovász László, Maros István, Prékopa András, Recski András, Stoyan Gisbert, Szentkúti Zsolt (technikai szerkesztő), Tandori Károly, Tusnády Gábor, Varga László

XVIII. kötet

Szerkesztőség és kiadóhivatal: 1027 Budapest, Fő utca 68.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok változó terjedelmű füzetekben jelenik meg, és olyan eredeti tudományos cikkeket publikál, amelyek a gyakorlatban, vagy más tudományokban közvetlenül felhasználható új matematikai eredményt tartalmaznak, illetve már ismert, de színvonalas matematikai apparátus újszerű és jelentős alkalmazását mutatják be. A folyóirat közöl cikk formájában megírt, új tudományos eredménynek számító programokat, és olyan, külföldi folyóiratban már publikált dolgozatokat, amelyek magyar nyelven történő megjelentetése elősegítheti az elért eredmények minél előbbi, széles körű hazai felhasználását. A szerkesztőbizottság bizonyos időnként lehetővé kívánja tenni, hogy a legjobb cikkek nemzetközi folyóiratok különszámaként angol nyelven is megjelenhessenek.

A folyóirat feladata a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztályának munkájára vonatkozó közlemények, könyvismertetések stb. publikálása is.

A kéziratok a főszerkesztőhöz, vagy a szerkesztőbizottság bármely tagjához beküldhetők. A főszerkesztő címe:

Benczúr András, főszerkesztő

1027 Budapest, Fő utca 68.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért felelősséget nem vállal.

Az Alkalmazott Matematikai Lapok előfizetési ára kötetenként 850 forint. Megrendelések a szerkesztőség címen lehetségesek.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungaricae,
2. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica.

18  
1994/1998  
Új Beköszöntő

317471

Szokatlan, hogy egy több, mint 20 éves múlttal rendelkező folyóirat új beköszöntővel jelentkezik.

A Szerkesztő Bizottság azért érezte szükségét ennek, hogy a több éves kritikus szakasz, kiadási és szerkesztési problémák rendeződése után így forduljon figyelemfelhívással mind az olvasókhoz, mind a lehetséges szerzőkhöz.

Azzal, hogy sikerült a Bolyai János Matematikai Társulat keretében megtalálni a megfelelő kiadót, lehetővé vált a Lapok kiadásának, szerkesztésének konszolidálása. A hagyományos profilt megőrizve szeretnénk egy aktív, a hazai és a magyar nyelvű matematikai élet számára dinamikát, inspirációt adó publikálási fórumot biztosítani.

Ennek a kiadás oldaláról nincsenek akadályai, az MTA támogatásával a kiadás fedezete biztosítva van. A technika, a  $\text{\TeX}$ -ben történő szedés alapján, lehetővé tesz egy rugalmasabb szerkesztést, ahol cikkenként egymástól függetlenül történhet a szedés, és egy füzet lezárható és megjelentethető azonnal, ahogy elegendő számú korrektúrára is túljutott cikk rendelkezésre áll. Ettől azt várjuk, hogy rendkívül megrövidül a kézirat leadásától a megjelenésig tartó idő.

A most megjelenő speciális kötet is ezt készíti elő, úgy, hogy megtartja a folyamatos kötetszámozást, de egyszerre négy évet ugrik át. Ezzel megszüntetjük a szigorú évenkénti egy kötet rendszert, ami négy év időeltolódást halmozott fel, és már olyan jelenségeket okozott, hogy a „jövőben” leadott kéziratokat jelentettünk meg.

A továbbiakban sem lehet garantálni az évenkénti egyenletes időben és terjedelemben való megjelenést. Ezt a kéziratok beérkezésének ütemezhetetlensége okozza mindaddig, amíg nem áll bőséges kézirat rendelkezésünkre.

A terjesztésben eddig is gondot okozott, hogy ilyen kiszámíthatatlan megjelenés mellett az éves előfizetési forma nem megfelelő. Szeretnénk eddigi előfizetőinket, mint megrendelőket megtartani, s várjuk újabb megrendelőinket. A megrendeléseket lemondásukig érvényben lévőnek tekintjük, s a megjelenő füzeteket utánvétellel küldjük folyamatosan. (Új megrendelőinknek, vagy jelenlegi megrendelőinknek kérésükre a 13–17. kötetekből egy teljes sorozatot ajándékba megküldünk.)

A felgyorsuló átfutási idő a hagyományos dolgozatok mellett lehetővé teszi más publikálási formák bevezetését, különösen a Ph.D. hallgatók munkáinak, az MTA doktori cím elnyerését követően a tézisek, esetleg értekezések közlését, recenziók, közéleti hírek megjelentetését.

Ahhoz, hogy a fent vázolt elképzelések megvalósuljanak, szükség van arra, hogy újra kedvet kapjanak szerzőink egy gyors átfutású, magyar nyelvű publikálásra. Szeretnénk a „nyelvében él a nemzet” elvét a matematika számára is megvalósítani.

Várjuk megrendelőink, olvasóink, szerzőink észrevételeit, javaslatait a Lapok kiadásával és szerkesztésével kapcsolatban, és kérjük, hogy aktivitásukkal járuljanak hozzá az Alkalmazott Matematikai Lapok megújulásához.

Budapest, 1998. augusztus

Dr. Benczúr András  
főszerkesztő





# A KETTŐSEN SZTOCHASZTIKUS MATRIXOKRA VONATKOZÓ VAN DER WAERDEN SEJTÉS ELEMI BIZONYÍTÁSA

GYIRES BÉLA

Debrecen

## 1. Bevezetés

(a) Jelölje  $\mathbb{R}_n$  an  $n$ -dimenziós valós vektorteret, elemei legyenek oszlopvektorok.  $e \in \mathbb{R}_n$  jelölje azt a vektort, amelynek minden komponense az egység.

Jelölje  $\mathcal{M}$  az  $n \times n$  típusú valós mátrixok halmazát. Legyen  $A^* \in \mathcal{M}$  az  $A \in \mathcal{M}$  transzponáltja.  $E \in \mathcal{M}$  jelölje az egységmatrixot.

Az  $A = (a_{jk}) \in \mathcal{M}$  matrix permanensén, jelölése  $\text{Per}A$ , értjük a

$$\text{Per}A = \sum_{(i_1, \dots, i_n)} a_{1i_1} \dots a_{ni_n}$$

kifejezést, ahol az  $(i_1, \dots, i_n)$  szummáció a teljes szimmetria csoportra terjesztendő ki.

Jelölje  $\Gamma$  azoknak a  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  vektoroknak a halmazát, amelyeknek komponensei olyan nem negatív egész számok, amelyek eleget tesznek a

$$0 \leq \beta_k \leq n \quad (k = 1, \dots, n), \quad \beta_1 + \dots + \beta_n = n$$

feltételeknek.

Jelölje  $C_{\beta_1 \dots \beta_n}(A)$  azt a matrixot, amely az  $A \in \mathcal{M}$  matrix oszlopaiból tevődik össze a következőképpen. Az  $A$  matrix  $k$ -adik oszlopa  $\beta_k$ -szor szerepel a  $C_{\beta_1 \dots \beta_n}(A)$  matrixban és  $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma$ . Ha  $\beta_k = 0$ , akkor az  $A$  matrix  $k$ -adik oszlopa nem szerepel a  $C_{\beta_1 \dots \beta_n}(A)$  matrixban.

Legyen  $A = UAV^*$  az  $A \in \mathcal{M}$  matrix polár előállítása, ahol  $U \in \mathcal{M}$ ,  $V \in \mathcal{M}$ ,  $UU^* = VV^* = E$  és  $\Lambda \in \mathcal{M}$  diagonális mátrix, amelynek diagonális elemei nem negatív számok. Legyenek ezek  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  csökkenő sorrendben elrendezve. Alkalmazva a Cauchy-Binet-féle kifejtési tételt ([10], Theorem 1.3), azt kapjuk, hogy

$$(1.1) \quad \text{Per}A = \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma} \frac{\lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1! \dots \beta_n!} \text{Per}C_{\beta_1 \dots \beta_n}(U) \text{Per}C_{\beta_1 \dots \beta_n}(V).$$

(b) Legyen  $\mathcal{K} \in \mathcal{M}$  azoknak a matrixoknak a halmaza, amelyekben valamennyi sor- és oszlopösszeg egyenlő az egységgel.

---

Szüleim és nővérem emlékezetére .

Magától értetődően  $A \in \mathcal{K}$  akkor és csak akkor, ha  $Ae = A^*e = e$ , azaz ha az egység olyan sajátértéke az  $A$  matrixnak, amelynek jobb- és baloldali sajátvektora  $e$ , illetve  $e^*$ .

Ennek a kritériumnak a segítségével könnyen igazolhatjuk, hogy amennyiben  $A \in \mathcal{K}$ ,  $B \in \mathcal{K}$ , akkor  $AB \in \mathcal{K}$ , továbbá, hogy  $A^{-1} \in \mathcal{K}$ , amennyiben  $A^{-1}$  létezik. Az is következik, hogy az  $A = U\Lambda V^*$  előállításban szereplő  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  szinguláris értékek között van olyan, amely az egységgel egyenlő, és ha  $\lambda_k$  ez, akkor az  $U$  és  $V$  matrixok  $k$ -adik oszlopa az  $\frac{1}{\sqrt{n}}e$  vektorral egyenlő. Ebből az eredményünkből adódik a következő. Amennyiben az  $A \in \mathcal{K}$  matrix polár előállítása  $A = U\Lambda V^*$ , akkor

$$(AA^*)^{1/2} \in \mathcal{K}, \quad (A^*A)^{1/2} \in \mathcal{K}, \quad U\Lambda^{1/2}V^* \in \mathcal{K}, \quad V\Lambda^{1/2}U^* \in \mathcal{K}.$$

Ha ugyanis figyelembe vesszük, hogy  $U$  és  $V$  ortogonális matrixok, arra jutunk, hogy  $U^*e = V^*e = \sqrt{n}e_k$ , ahol  $e_k \in \mathbb{R}_n$   $k$ -adik komponense az egység, a többi zérussal egyenlő. Ennek következtében

$$\Lambda^{1/2}U^*e = \Lambda^{1/2}V^*e = \sqrt{n}e_k,$$

és így végezetül

$$U\Lambda^{1/2}U^*e = V\Lambda^{1/2}V^*e = U\Lambda^{1/2}V^*e = V\Lambda^{1/2}U^*e = e.$$

Hasonlóan mutatható ki, hogy az oszlopösszegek is az egységgel egyenlők.

Jelölje  $\mathcal{H} \in \mathcal{K}$  azoknak a matrixoknak a halmazát, amelyeknek elemei nem negatív számok, azaz a kettősen sztochasztikus matrixok halmazát. Jelölje  $S_0 \in \mathcal{H}$  azt a matrixot, amelynek minden eleme  $\frac{1}{n}$ . Nyilvánvaló, hogy  $E \in \mathcal{H}$  és az is, hogy  $AB \in \mathcal{H}$ ,  $A^* \in \mathcal{H}$ , ha  $A \in \mathcal{H}$ ,  $B \in \mathcal{H}$ .

(c) Van der Waerden-től származik a kettősen sztochasztikus matrixokra vonatkozó következő sejtés ([12]).

Ha  $A \in \mathcal{H}$ , akkor

$$\text{Per} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha  $A = S_0$ .

A sejtésnek jóformán egyidőben jelent meg két bizonyítása. Mégpedig 1980-ban az [1], 1981-ben a [2] dolgozatban. Mindkét dolgozatban a bizonyítás alapgondolata azonos. Mivel vita van abban a vonatkozásban, hogy valójában kitől ered az alapgondolat, a bebizonyított van der Waerden sejtést van der Waerden tételnek fogjuk nevezni. Pach János [11] dolgozatában részletesen ismerteti azt a bizonyítási eljárást, amelyet az említett két szerző a van der Waerden sejtés bizonyításában követ.

A szerző permanensekkel a lineáris rendstatisztikák vizsgálata közben találkozott. A permanensek elméletének tanulmányozása közben ismerte meg a van der Waerden sejtést is. Jelen dolgozat irodalomjegyzéke tartalmazza azt a hét dolgozatát, amelyekben közvetve vagy közvetlenül ezzel a sejtéssel foglalkozik. 1977-ben megjelent [5] dolgozatában bebizonyított egy tételt, amelyről nem régen sikerült kimutatnia, hogy a van der Waerden tétellel ekvivalens. Ezt az eredményét [9] dolgozatának harmadik fejezetében tette közzé.

Részben azért, mert a van der Waerden tétel bizonyításával már magyar nyelvű dolgozat is foglalkozott, részben, mert a szerző [5] dolgozata nehezen hozzáférhető, részben, mivel

célszerű, hogy a szerzőnek két különböző időben és helyen megjelent bizonyítási részletei egy helyen is olvashatók legyenek, döntött úgy a szerző, hogy megírja és közzéteszi ezt a dolgozatát. Ezeknek megfelelően a jelen dolgozat célja a van de Waerden sejtés bizonyítása olyan módon, hogy igazoljuk az [5] dolgozatban megjelent tételt is és azután a [9] dolgozat második fejezetében foglaltak alapján kimutatjuk e tétel a van der Waerden tétellel való ekvivalenciáját. Megjegyezzük, hogy az [5] dolgozathoz átvett tételnek itt közölt bizonyítása valamivel egyszerűbb, mint az eredeti volt.

Bizonyítási módszerünk Egorychev és Falikman bizonyítási eljárásával szemben egészen elemi, csak a mátrixok szorzására vonatkozó Cauchy-Binet-féle kifejtési tételre épít. A szóbanforgó két tétel ekvivalenciájának ismeretében mondhatjuk azt, hogy a van der Waerden tétel ekvivalensének igazolása már 1977-ben megtörtént.

Végül megemlíti, hogy a [9] dolgozat számos van der Waerden típusú tétellel is foglalkozik. A kapott eredmények egyik következménye pl. a van der Waerden tétel következő messzemenő finomítása ([9], Theorem 5.1)

Legyen  $A \in \mathcal{H}$  és vezessük be a mátrixértékű

$$B(x) := (1 - x)S_0 + xA, \quad 0 \leq x \leq 1$$

polinomot. Nyilvánvaló, hogy  $B(x) \in \mathcal{H}$ . Ekkor a  $\text{Per}B(x)$  polinom szigorúan növekedő a  $0 \leq x \leq 1$  intervallumban és  $B'(0) = B'(1) = 0$ .

## 2. A van der Waerden tétel bizonyítása

Szükségünk lesz a szerző következő eredményére:

2.1 TÉTEL. Ha  $A \in \mathcal{K}$ , továbbá  $x \in \mathbb{R}_1$ ,  $y \in \mathbb{R}_1$ ,  $x + y = 1$ , akkor

$$(2.1) \quad x^2 \text{Per}(AA^*)^{1/2} + y^2 \text{Per}(A^*A)^{1/2} + 2xy \text{Per}A \geq \frac{n!}{n^n},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha  $A = S_0$ .

*Bizonyítás.* A Cauchy-Binet-féle kifejtési tétel alapján érvényes (1.1), továbbá a

$$\begin{aligned} \text{Per}(AA^*)^{1/2} &= \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma} \frac{\lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1! \dots \beta_n!} \text{Per}^2 C_{\beta_1 \dots \beta_n}(U), \\ \text{Per}(A^*A)^{1/2} &= \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma} \frac{\lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1! \dots \beta_n!} \text{Per}^2 C_{\beta_1 \dots \beta_n}(V) \end{aligned}$$

azonosságok alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (2.2) \quad x^2 \text{Per}(AA^*)^{1/2} + y^2 \text{Per}(A^*A)^{1/2} + 2xy \text{Per}A &= \\ &= \sum_{(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma} \frac{\lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_n^{\beta_n}}{\beta_1! \dots \beta_n!} (x \text{Per} C_{\beta_1 \dots \beta_n}(U) + y \text{Per} C_{\beta_1 \dots \beta_n}(V))^2. \end{aligned}$$

Legyen  $\lambda_k = 1$ . Ha figyelembe vesszük, hogy ekkor

$$C_{\beta_k=n}(U) = C_{\beta_k=n}(V) = \sqrt{n}S_0,$$

(2.2) alapján megkapjuk a (2.1) egyenlőtlenséget, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$(2.3) \quad \lambda_1^{\beta_1} \dots \lambda_n^{\beta_n} (x \text{Per} C_{\beta_1 \dots \beta_n}(U) + y \text{Per} C_{\beta_1 \dots \beta_n}(V)) = 0, \\ (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \Gamma, \quad \beta_k < n.$$

Most megmutatjuk, hogy (2.3) akkor és csak akkor teljesül, ha  $\lambda_\ell = 0$ ,  $\ell \neq k$ , azaz ha  $A = S_0$ . Hogy e feltétel elegendő, az triviális. De szükséges is.

Legyen  $\ell \neq k$ . Jelölje  $\{u_j\}_1^n$  és  $\{v_j\}_1^n$  az  $U$ , illetve  $V$  matrixok  $\ell$ -edik oszlopának elemeit. Ekkor

$$(2.4) \quad \lambda_\ell^2 (x \text{Per} C_{\beta_\ell=2, \beta_k=n-2}(U) + y \text{Per} C_{\beta_\ell=2, \beta_k=n-2}(V)) = 0$$

(2.3) alapján. Alkalmazva az

$$S_2(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j$$

jelölést, (2.4) miatt

$$(2.5) \quad 2!(n-2)! \lambda_\ell^2 (x S_2(u_1, \dots, u_n) + y S_2(v_1, \dots, v_n)) = 0.$$

Mivel  $U$  és  $V$  ortogonális matrixok, és mivel e matrixok  $k$ -edik oszlopa az  $\frac{1}{\sqrt{n}}e$  vektorral egyenlő,

$$(u_1 + \dots + u_n)^2 = 1 + 2S_2(u_1, \dots, u_n) = 0,$$

azaz

$$S_2(u_1, \dots, u_n) = S_2(v_1, \dots, v_n) = -\frac{1}{2}.$$

Ezeknek a (2.5) kifejezésbe történő behelyettesítése után arra jutunk, hogy

$$\lambda_\ell^2 (x + y) = \lambda_\ell^2 = 0, \quad \ell \neq k,$$

amivel a 2.1. Tétel második állítását be is bizonyítottuk.

A következőkben a van der Waerden tételt bizonyítjuk be.

**2.2 TÉTEL.** Ha  $A \in \mathcal{H}$ , akkor

$$\text{Per} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha  $A = S_0$ .

2.1 KÖVETKEZMÉNY. Ha  $A \in \mathcal{H}$ , továbbá  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $x + y = 1$ , akkor fennáll a (2.1) egyenlőtlenség, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha  $A = S_0$ .

Ahhoz, hogy bebizonyítsuk a 2.2 Tételt, kimutatjuk a következő állítást.

2.1 ÁLLÍTÁS. A 2.1 Következmény és a 2.2 Tétel ekvivalensek.

*Bizonyítás.* Először megmutatjuk, hogy ha a 2.2 Tétel érvényes, akkor a 2.1 Következmény igaz.

Legyen ugyanis  $A \in \mathcal{H}$ , akkor a 2.2 Tétel következtében

$$\text{Per} A \geq \frac{n!}{n^n}, \quad \text{Per}(AA^*)^{1/2} \geq \frac{n!}{n^n}, \quad \text{Per}(A^*A)^{1/2} \geq \frac{n!}{n^n},$$

ahol mindhárom helyen egyenlőség akkor és csak akkor, ha

$$A = (AA^*)^{1/2} = (A^*A)^{1/2} = S_0.$$

Ennek következtében és mivel  $x^2 \geq 0$ ,  $y^2 \geq 0$ ,  $2xy \geq 0$ ,  $(x + y)^2 = 1$ ,

$$x^2 \text{Per}(AA^*)^{1/2} + y^2 \text{Per}(A^*A)^{1/2} + 2xy \text{Per} A \geq \frac{n!}{n^n},$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha

$$\text{Per}(AA^*)^{1/2} = \text{Per}(A^*A)^{1/2} = \text{Per} A = \frac{n!}{n^n},$$

azaz, ha  $A = S_0$  a 2.2 Tétel értelmében.

Most megmutatjuk, hogy megfordítva a 2.2 Tétel a 2.1 Következményből adódik.

2.2 ÁLLÍTÁS. A

$$(2.6) \quad \text{Per} A = \frac{n!}{n^n}$$

egyenletnek a  $\mathcal{H}$  halmazon egyetlen megoldása az  $A = S_0$ .

*Bizonyítás.* Szükségünk lesz a 2.2 Tétel második állítására, amelynek bizonyítása pl. [13] dolgozatban található. (Corollaty 3.2).

Kimutatjuk, hogy a 2.1 Következménynek abból az állításából, hogy a

$$(2.7) \quad x^2 \text{Per}(AA^*)^{1/2} + y^2 \text{Per}(A^*A)^{1/2} + 2xy \text{Per} A = \frac{n!}{n^n},$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x + y = 1$$

polinomnak a  $\mathcal{H}$  halmazon egyetlen megoldása  $A = S_0$ , következik, hogy ez a

$$\text{Per} A = \frac{n!}{n^n}, \quad \text{Per}(AA^*) = \frac{n!}{n^n}, \quad \text{Per}(A^*A) = \frac{n!}{n^n}$$

egyenleteknek is a  $\mathcal{H}$  halmazon egyetlen megoldása.

Mivel ugyanis a (2.7) azonosság az

$$x^2[\text{Per}(AA^*)^{1/2} + \text{Per}(AA^*)^{1/2} - 2\text{Per}A] - 2x[\text{Per}(A^*A)^{1/2} - \text{Per}A] + \left[ \text{Per}(A^*A)^{1/2} - \frac{n!}{n^n} \right] \equiv 0$$

alakban is írható, így (2.7) akkor és csak akkor állhat fenn, ha

$$(2.8) \quad \text{Per}A = \frac{1}{2}[\text{Per}(AA^*)^{1/2} + \text{Per}(AA^*)^{1/2}],$$

$$(2.9) \quad \text{Per}A = \text{Per}(A^*A)^{1/2},$$

$$(2.10) \quad \text{Per}(A^*A)^{1/2} = \frac{n!}{n^n}$$

Oldjuk meg ezt az egyeletrendszert a  $\mathcal{H}$  halmazon.

2.1 Következmény szerint (2.10) egyetlen megoldása  $A = S_0$ .

(2.8) és (2.9) egyenletekből kapott

$$\text{Per}(AA^*)^{1/2} = \text{Per}(A^*A)^{1/2} = \frac{n!}{n^n}$$

egyenleteknek így szintén  $A = S_0$  az egyetlen megoldása a  $\mathcal{H}$  halmazon.

A (2.9) és (2.10) egyenletekből adódó (2.6) egyenletnek 2.2 Állítás szerint egyetlen megoldása a  $\mathcal{H}$  halmazon ugyancsak  $A = S_0$ .

Összevetve ezeket az eredményeket, arra jutunk, hogy (2.6) a (2.8), (2.9) és (2.10) egyenleteket kielégítő megoldása a  $\mathcal{H}$  halmazon.

Ismeretes (l. pl. [7], Conjecture 4.1), hogy a 2.2 Tétel első állítása már következik a 2.2 Állításból. A teljesség kedvéért új bizonyítást adunk ennek a ténynek az igazolására.

Tegyük fel, hogy a 2.2 Tétel első állítása nem igaz, azaz létezik olyan  $A \in \mathcal{H}$ , amelyre

$$(2.11) \quad \text{Per}A < \frac{n!}{n^n}.$$

Nyilvánvaló, hogy  $A \neq S_0$ . Legyen  $k$  természetes szám. Mivel

$$(AA^*)^{2k+1} \neq S_0,$$

és ez a matrix pozitív szemidefinit, a 2.1 Tételből következik, hogy

$$(2.12) \quad \text{Per}(AA^*)^{2k+1} > \frac{n!}{n^n}.$$

Vezessük be a  $0 \leq x \leq 1$  intervallumon értelmezett

$$B(x) := (1-x)A + x(AA^*)^{2k+1}$$

matrixértékű függvényt. Nyilvánvaló, hogy  $B(x) \in \mathcal{H}$  és (2.11), valamint (2.12) alapján az is, hogy

$$\text{Per}B(0) < \frac{n!}{n^n}, \quad \text{Per}B(1) > \frac{n!}{n^n}.$$

Mivel  $\text{Per}B(x)$  folytonos függvény az adott intervallumon, létezik olyan  $x_0$ ,  $0 < x_0 < 1$ , amelyre

$$\text{Per}B(x_0) = \frac{n!}{n^n}.$$

De a 2.2 Állítás szerint ez az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$(2.13) \quad (1 - x_0)A + x_0(AA^*)^{2k+1} = S_0.$$

A következőkben azt mutatjuk meg, hogy ennek a matrix egyenletnek a  $\mathcal{H}$  halmazon egyetlen megoldása  $A = S_0$ , ami ellentmond annak a feltételünknek, hogy  $A \neq S_0$ .

Ismeretes, hogy az  $S_0$  matrix spektrálelőállítása a

$$(2.14) \quad S_0 = V\Lambda V^*$$

kifejezéssel egyenlő, ahol  $V$  valós ortogonális matrix, amelynek első oszlopa  $\frac{1}{\sqrt{n}}e$ , különben tetszőleges, és  $\Lambda$  az a diagonális matrix, amely diagonálisának egyik eleme az egység, a többi zérussal egyenlő. A (2.13) formulából adódik, hogy  $A$  szimmetrikus matrix. Legyen  $A = U^*\Lambda_1 U$  az  $A$  matrix spektrálelőállítása, ahol a diagonális  $\Lambda_1$  matrix  $1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  diagonális elemei valós számok. Felhasználva az

$$(AA^*)^{2k+1} = U^*\Lambda_1^{2k+1}U$$

kifejezést, továbbá a (2.14) előállítást, (2.13) segítségével azt kapjuk, hogy  $U = V$ . Ennek következtében a (2.13) egyenlőségből az

$$(1 - x_0)\Lambda_1 + x_0\Lambda_1^{2k+1} = \Lambda$$

egyenlőségre jutunk, ahonnan

$$(2.15) \quad (1 - x_0)\alpha_j + x_0\alpha_j^{2k+1} = 0, \quad (j = 2, \dots, n).$$

Ennek az egyenletnek két megoldása lehet. Az egyik

$$(2.16) \quad \alpha_j = 0,$$

a másik

$$(2.17) \quad \alpha_j = \left( \frac{x_0 - 1}{x_0} \right)^{1/2k}.$$

Mivel a feltétel alapján  $(x_0 - 1)/x_0 < 0$ , így (2.17) imaginárius szám, ami ellentmond annak a megállapításunknak, hogy  $\Lambda_1$  diagonális elemei valós számok. Így azt kapjuk, hogy a (2.15) egyetlen megoldása (2.16), azaz a (2.13) matrixegyenletnek a  $\mathcal{H}$  halmazon egyetlen megoldása  $A = S_0$ . Ezzel a 2.2 Tétel bizonyítását befejeztük.



## IRODALOM

- [1] EGORYCHEV, G. P., „A solution of the van der Waerden 's permanent problem.”, Academy of Sciences SSSR, Preprint IFSO-L3 M, Krasnoyarsk, 1980..
- [2] FALIKMAN, D. I., „The proof of the van der Waerden 's conjecture regarding to doubly stochastic matrices.”, *Mat. Zametki* **29** (1981).
- [3] GYIRES, B., „Discrete distributions and permanents.”, *Publ. Math.* **20** (1973), 95–106.
- [4] GYIRES, B., „On inequalities of permanents.”, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai* **18** (1976), 471–484.
- [5] GYIRES, B., „On inequalities concerning the permanent of matrices.”, *J. Comb. Inf. Syst. Sci.* **2** (1977), 107–113.
- [6] GYIRES, B., „On inequalities concerning permanents of matrices.”, *Linear and Multilinear Algebra* **5** (1978), 1–4.
- [7] GYIRES, B., „The common source of several inequalities concerning doubly stochastic matrices.”, *Publ. Math.* **27** (1980), 291–304.
- [8] GYIRES, B., „On inequalities concerning the permanents of generalized doubly stochastic matrices.”, *Publ. Math.* **31** (1984), 39–46.
- [9] GYIRES, B., „Elementary proof for a van der Waerden 's conjecture and related theorems.”, *Computers Math. Appl.*
- [10] MINC, H., *Permanents*, Addison-Wesley Publ. Co..
- [11] PACH, J., „Vegyés térfogat és a van der Waerden sejtés.”, *Matematikai Lapok* **29** (1977–1981), 49–60.
- [12] VAN DER WAERDEN, B. L., „Aufgabe 45.”, *Jahresber. Dtsch. Math.-Ver.* **35**, 117.
- [13] GYIRES, B., „On an extension of the van der Waerden's theorem regarding to doubly stochastic matrices.”, (*Közlés alatt*).

(Beérkezett: 1995. október 22.)

GYIRES BÉLA  
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM  
DEBRECEN

ELEMENTARY PROOF OF VAN DER WAARDEN'S  
CONJECTURE ON DOUBLY STOCHASTIC MATRICES

B. GYIRES

A well-known conjecture of van der Waerden says that for the permanent  $\text{Per} A$  of an  $n \times n$  doubly stochastic matrix  $A$  we have  $\text{Per} A \geq \frac{n!}{n^n}$ , with equality if and only if all entries of the matrix  $A$  equal to  $m^{-1}$ . In 1977 [1], the author proved that if  $A$  is an  $n \times n$  doubly stochastic matrix, and  $n \geq 0$ ,  $q \geq 0$ ,  $n + q = 1$ , then (2.1) holds, with equality if and only if all entries of the matrix  $A$  equal to  $m^{-1}$ . In this paper, we show that the van der Waerden's conjecture and (2.1) are equivalent. On the basis of this equivalence one can say that the equivalent of the van der Waerden's conjecture was solved already in 1977.

# KVADRATIKUS LJAPUNOV-FÜGGVÉNYEK IDŐÁLLANDÓI

LÁSZLÓ ÁKOS

Budapest

Teljesen irányítható lineáris irányítási rendszerekhez sem lehet mindig olyan, adott Ljapunov- vagy Riccati-egyenletből számított stabilizáló visszacsatolást és kvadratikuss Ljapunov-függvényt találni, hogy a Ljapunov-függvény exponenciális csökkenése tetszőleges gyors legyen. A dolgozatban felső korlátot adunk a konvergencia sebességére, és vizsgáljuk azokat az eseteket, amikor az mégis tetszőlegesen gyorsá tehető a visszacsatolás alkalmas megválasztásával.

## 1. Bevezetés

Tekintsük a

$$(1.1) \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

differentiálegyenletet, ahol  $A$   $n \times n$ -es,  $B$   $n \times m$ -es adott, valós konstans mátrixok. Tegyük fel, hogy az  $(A, B)$  pár teljesen irányítható, azaz adott  $t_1 < t_2$  számokhoz és tetszőleges  $x_1, x_2$   $n$  dimenziós vektorokhoz létezik olyan a  $[t_1, t_2]$ -on értelmezett  $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  függvény, hogy az (1.1) differentiálegyenlet  $x(t_1) = x_1$  kezdeti értékkel vett megoldására  $x(t_2) = x_2$  teljesül. Ismeretes [2], [3], hogy konstans  $A$  és  $B$  mátrixokra ez akkor és csak akkor igaz, ha a  $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$  ún. Kalman-féle rangmátrix rangja  $n$ , és ezért a tulajdonság nem függ az intervallumtól.

1.1. TÉTEL. [2], [3]. *Ha az  $(A, B)$  pár teljesen irányítható, akkor az  $A + BL$  mátrix sajátértékei „szabadon kialakíthatók”, ami azt jelenti, hogy tetszőlegesen adott  $n$  darab számhoz megválasztható úgy az  $L$  mátrix, hogy az  $A + BL$  mátrix sajátértékei a megadott számok legyenek.*

Akkor is igaz a tétel, ha a mátrixok valóságosak, de akkor ki kell kötni, hogy a számok konjugált párokban legyenek megadva.

A későbbiekben szükségünk lesz a következő, az irányíthatósággal rokon fogalomra.

A  $(C, A)$  párt teljesen megfigyelhetőnek nevezzük a  $[t_1, t_2]$ -on, ha  $\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t)$  és  $Cx(t) \equiv 0$  minden  $t \in [t_1, t_2]$ -re való teljesüléséből  $x(t) \equiv 0$  következik. Igazolható, hogy a  $(C, A)$  pár pontosan akkor lehet teljesen megfigyelhető, ha az  $(A^T, C^T)$  pár teljesen irányítható [2].

1.2. TÉTEL. Tegyük fel, hogy a  $(C, A)$  pár teljesen megfigyelhető, és tekintsük az  $A^T P + PA + C^T C = 0$  ún. algebrai Ljapunov-egyenletet.

- (i) Ha az egyenletnek létezik pozitív definit  $P$  megoldása, akkor az  $A$  mátrix aszimptotikusan stabilis (sajátértékei a nyílt baloldali félsíkon helyezkednek el).
- (ii) Ha az  $A$  mátrix aszimptotikusan stabilis, akkor az egyenletnek létezik definit  $P$  megoldása, és  $P$  egyértelmű.

A megoldás a  $P = \int_0^\infty e^{A^T t} C^T C e^{A t} dt$  formulával adható meg.

Legyen  $P$  pozitív definit konstans mátrix. Az (1.1) differenciálegyenlet  $x(\cdot)$  megoldásának  $L(x(t)) = x^T(t) P x(t)$  kvadratikuss függvényét röviden Ljapunov-függvénynek nevezzük a továbbiakban.

A dolgozatban a gyakorlati szempontból fontos  $u(t) = Kx(t)$  alakú lineáris visszacsatolásokkal foglalkozunk, ahol  $K$   $m \times n$ -es mátrix. Ha behelyettesítjük (1.1)-be, akkor a rendszer éppen az

$$(1.2) \quad \frac{dx(t)}{dt} = (A + BK)x(t) \text{ alakot ölti.}$$

1.3. TÉTEL [2.]. Ha a Ljapunov-függvény  $\frac{dL}{dt} = x^T(t)((A + BK)^T P + P(A + BK))x(t)$  deriváltja negatív szemidefinit, más szóval a  $Q \stackrel{\text{def}}{=} -(A + BK)^T P - P(A + BK)$  mátrix pozitív szemidefinit, és ha az (1.2) egyenlet minden olyan  $x(\cdot)$  megoldására, amelyre  $Qx(t) = 0 \forall t > 0$ -ra teljesül,  $x(t) \equiv 0$  is teljesül, akkor Ljapunov megfelelő tétele [2.] szerint az (1.2) egyenlet az origóban aszimptotikusan stabilis, a megoldások az origóhoz tartanak. Ismert, hogy a tétel feltételei ekvivalensek egy  $C$  mátrix létezésével, amelyre  $Q = C^T C$  teljesül, és a  $(C, (A + BK))$  pár megfigyelhető [2], [3].

A  $Q$  mátrix definitése nyilván fontos feltétel a fentiekben.

A gyakorlati alkalmazások során az egyenletekben szereplő mátrixok általában nem pontosan ismertek, mindig van valamilyen a külső zavarásokból adódó bizonytalanság. Például robotok irányításának tervezésekor általában csak pontatlan információink vannak a mozgatandó tárgy tömegéről. Ezért ha Ljapunov módszerével szeretnénk stabilitást bizonyítani a visszacsatolt bizonytalan rendszerre, akkor a  $Q$  mátrix nem lehet szinguláris, hiszen ekkor kis perturbációk hatására is indefinitté válhat a derivált.

Tegyük fel tehát, hogy adott egy  $Q$  pozitív definit mátrix, és adott egy olyan  $K$  mátrix, amelyre az  $A + BK$  mátrix aszimptotikusan stabilis. (Ilyen létezik, hiszen irányítható pár esetén a visszacsatolt rendszer sajátértékei tetszőlegesen megválaszthatók.) Most — a fenti gondolatmenetet megfordítva — keressük meg az

$$(1.3) \quad P(A + BK) + (A + BK)^T P + Q = 0$$

egyenletet kielégítő pozitív  $P$  mátrixot, és adjunk hozzá egy olyan  $\alpha > 0$  konstans értéket, hogy

$$(1.4) \quad Q \geq \alpha P$$

teljesüljön, abban az értelemben, hogy  $Q - \alpha P$  pozitív szemidefinit.

Ezzel az (1.2) egyenlet megoldásai mentén igaz a

$$\frac{dL(x)}{dt} = -x^T Q x \leq -\alpha L(x) \text{ egyenlőtlenség, ezért}$$

$$L(x(t)) \leq L(x(0))e^{-\alpha t}$$

is teljesül, és az  $\frac{1}{\alpha}$  mennyiség „időállandóként” értelmezhető, a konvergencia sebességét adja meg. Ha a stabilizáló visszacsatolás  $K$  mátrixát megfelelően választjuk, akkor az (1.3)-ból számítható pozitív definit  $P$  mátrixhoz (1.4)-ből elegendően nagy  $\alpha$  adódik, és az  $L(x(t))$  Ljapunov-függvény csökkenése gyors lesz. Hasonló megfontolások már viszonylag régóta ismertek (pl. [5]). Néha (1.1) helyén algebrai Riccati-egyenlet áll [4.].

A fenti gondolatmenetek korlátaira szeretnénk felhívni a figyelmet. Mint látni fogjuk — annak ellenére, hogy teljesen irányítható rendszerről van szó (és emiatt az  $A + BK$  mátrix sajátértékei tetszőlegesen megválaszthatók) — rögzített  $A$ ,  $B$  és  $Q$  mátrixok esetén nem igaz, hogy tetszőlegesen nagy  $\alpha$ -hoz létezik olyan  $K$  és  $P$  mátrix, amelyekre az  $A + BK$  mátrix asszimptotikusan stabilis és az (1.3) egyenlet ill. (1.4) egyenlőtlenség teljesül. A 3.§-ban bizonyítani fogjuk, hogy ha valamilyen  $K$  és  $P$  mátrixokra és  $\alpha$  számra mindhárom összefüggés fennáll, és  $m < n$ , akkor  $\alpha \leq \text{Cond}_2(T^T Q T)$ , ahol a  $T$  egy, az  $(A, B)$  párt kanonikus alakra hozó transzformáció mátrixa.

Ljapunov-függvények vizsgálatokor felmerülhet a következő, általánosabb kérdés is:

Mit mondhatunk az olyan

$$(1.5) \quad P(A + BK) + (A + BK)^T P + Q_1 = 0$$

$$(1.6) \quad Q_2 \geq \alpha P$$

rendszerekről, ahol  $A$ ,  $Q_1$  és  $Q_2$   $n \times n$ -es,  $B$   $n \times m$ -es konstans mátrixok,  $Q_1$  pozitív szemidefinit,  $Q_2$  pozitív definit és az  $(A, B)$  pár teljesen irányítható. Ha  $K$ ,  $P$  és  $\alpha$  kielégíti a fenti összefüggéseket, akkor az  $L(x(t)) = x^T(t) P x(t)$  Ljapunov-függvényre nyilvánvalóan teljesül a

$$\frac{\frac{dL(x(t))}{dt}}{L(x(t))} = \frac{d \ln(L(x(t)))}{dt} \leq -\alpha \frac{x^T(t) Q_1 x(t)}{x^T(t) Q_2 x(t)}$$

egyenlőtlenség. Azokon az  $x$  helyeken, ahol a jobboldal nem nulla,  $\alpha$  értékének növelésével a derivált csökkenthető. A 4.-ben ezzel foglalkozunk. Tekintsük a

$$(1.7) \quad \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0$$

$$J_\eta = \inf_{u \in L^2} \int_0^\infty (x^T(t) Q x(t) + \eta u^T(t) u(t)) dt$$

$$(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0)$$

irányítási rendszert, ahol  $\eta$  nemnegatív valós szám,  $Q$  pozitív definit mátrix.

A 4. szakaszban ezzel a problémával foglalkozunk. Az ún. olcsó irányítások („cheap control”) elméletének tárgya annak a kérdésnek a vizsgálata, hogy milyen az (1.7) rendszer viselkedése, ha az  $\eta$  paraméter kicsi, ill. ha nullához tart. Látni fogjuk, hogy ez szoros kapcsolatban van az általunk felvetett problémával.

Jelöljük az (1.4)-ben ill. (1.6)-ban szereplő  $\alpha$  értékek felső korlátját  $\bar{\alpha}$ -mal. Legyen  $S_{(A,B)} = \{K \in \mathbb{R}^{m \times n} : A + BK \text{ aszimptotikusan stabilis}\}$ .

Jelölje  $\lambda_{\min}(X)$  és  $\lambda_{\max}(X)$  az  $X$  szimmetrikus mátrix legkisebb és legnagyobb sajátértékét,  $\|Y\|$  az  $Y$  mátrix Euklideszi normáját ( $\|Y\| = \sqrt{\lambda_{\max}(Y^T Y)}$ ),  $\text{cond}_2(Y)$  az Euklideszi normához tartozó kondíciós számot ( $\text{cond}_2(Y) = \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(Y^T Y)}{\lambda_{\min}(Y^T Y)}}$ ).

## 2. Előkészítés

2.1. LEMMA. Az (1.5) és (1.6) egyenletekhez tartozó  $\alpha$  számok  $\bar{\alpha}$  felső korlátjára teljesül az

$$\frac{1}{\alpha} = \inf_{K \in S_{(A,B)}} \left\| \int_0^\infty Q_2^{-\frac{1}{2}} e^{(A+BK)^T t} Q_1 e^{(A+BK)^T t} Q_2^{-\frac{1}{2}} dt \right\| \quad \text{összefüggés}$$

*Bizonyítás.*  $(A+BK)$  stabilis a szóbanforgó  $K$  mátrixokra, ezért (1.5)-nek létezik pozitív definit  $P$  megoldása, és ez a  $P = \int_0^\infty e^{(A+BK)^T t} Q_1 e^{(A+BK)^T t} dt$  alakban írható. Rendezzük át az (1.6) egyenlőtlenséget, és írjuk be az előző formulát.

$$Q_2^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{(A+BK)^T t} Q_1 e^{(A+BK)^T t} dt Q_2^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\alpha} I \quad \text{adódik, ezzel a lemmát beláttuk.}$$

2.2. LEMMA. A  $\frac{dx(t)}{dt} = (A+BK)x(t)$  differenciálegyenletet megoldásaival

$$(2.1) \quad \frac{1}{\alpha} = \sup_{x(0)=Q_2^{-\frac{1}{2}} v, \|v\|=1} \left( \inf_{K \in S_{(A,B)}} \int_0^\infty x^T(t) Q_1 x(t) dt \right) \quad \text{teljesül.}$$

*Bizonyítás.* Az előző lemma alapján nyilvánvaló.

2.3. LEMMA. Tekintsük az (1.7) rendszert. Ennek célfüggvényére

$$J_0(x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} J_\eta(x_0) \quad \text{teljesül.}$$

*Bizonyítás.* A  $J_0(x_0) \leq J_\eta(x_0) \leq J_\mu(x_0)$  összefüggés nyilvánvalóan teljesül minden  $0 \leq \eta \leq \mu$  esetén, ezért elég azt (indirekt) feltenni, hogy  $J_0(x_0) < \lim_{\eta \rightarrow 0} J_\eta(x_0)$ . Ekkor létezik  $\varepsilon > 0$ , hogy  $J_0(x_0) + \varepsilon < J_\eta(x_0)$  minden  $\eta > 0$ -ra, és létezik olyan  $\bar{u}$  irányítás, hogy a hozzá tartozó  $x_{\bar{u}}$  megoldásra  $\int_0^\infty x_{\bar{u}}^T Q x_{\bar{u}} dt + \varepsilon < J_\eta(x_0)$  is teljesül és  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_{\bar{u}}(t) = 0$ .  $J_\eta(x_0)$  az  $\eta$ -hoz tartozó minimum értéke, ezért a fenti  $\bar{u}$ -mal  $J_\eta(x_0) \leq \int_0^\infty (x_{\bar{u}}^T Q x_{\bar{u}} + \eta \bar{u}^T \bar{u}) dt$  teljesül. Vessük össze ezt az előző egyenlőtlenséggel.

Így  $\varepsilon \leq \int_0^\infty \eta \bar{u}^T \bar{u} dt$  adódik minden  $\eta > 0$ -ra.  $\int_0^\infty \bar{u}^T \bar{u} dt \geq 0$  rögzített érték, ezért  $\varepsilon$  nem lehet pozitív. Ellentmondásra jutottunk, tehát a lemma állítása igaz.

Ismeretes, hogy az

$$(2.2) \quad A^T P + P A + Q - \frac{1}{\eta} P B B^T P = 0$$

algebrai Riccati-egyenletnek több  $P$  megoldása van, legfeljebb  $\binom{2n}{n}$  [2]. A  $P_\eta$  megoldást maximálisnak nevezzük, ha minden  $P$  megoldásra teljesül a  $P_\eta \geq P$  összefüggés.

**2.4. LEMMA.** Legyen  $P_\eta$  a (2.2) algebrai Riccati-egyenlet maximális pozitív megoldása. Ekkor  $J_0(x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} x_0^T P_\eta x_0$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $\eta > 0$ . Jól ismert, hogy a fenti algebrai Riccati-egyenlet  $P_\eta$  maximális megoldására teljesül a

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A x(t) + B u(t) & x(0) &= x_0 \\ x_0^T P_\eta x_0 &= \min_{u \in L^2} \int_0^\infty (x^T(t) Q x(t) + \eta u^T(t) u(t)) dt, \\ &(\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0) \end{aligned}$$

összefüggés, az optimális  $u(\cdot)$  irányítás pedig  $u(t) = -\frac{B^T}{\eta} P_\eta x(t)$  alakban adható meg ([1] és [2]).

Az előző lemmából adódik tehát az állítás.

Vezessük be a  $P_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} P_\eta$  jelölést.

**2.1. MEGJEGYZÉS.** Az előző három lemma alapján nyilvánvaló, hogy

$$\frac{1}{\alpha} = \lambda_{\max}(Q^{-\frac{1}{2}} P_0 Q^{-\frac{1}{2}}) = \rho(P_0 Q^{-1}).$$

2.5. LEMMA. Ha  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $Q = q \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  ahol  $s > 0$ , akkor

$$P_0 = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Bizonyítás.* A (2.2) egyenletet megoldva

$$P_\eta = \begin{bmatrix} \sqrt{q^2 + 2q\sqrt{r\eta}} & \sqrt{r\eta} \\ \sqrt{r\eta} & \sqrt{qr + 2r\sqrt{r\eta}} \end{bmatrix}$$

adódik. A határértéket képezve éppen az állításban szereplő  $P_0 = \begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ -t kapjuk.

2.6. LEMMA. Ha az (1.1) vagy (1.3) egyenletben az  $A$  mátrixot az  $A = BL$  mátrixszal helyettesítjük, ahol  $L$  tetszőleges  $m \times n$ -es mátrix, akkor  $\bar{\alpha}$  értéke nem változik.

*Bizonyítás.* A 2.4 lemma bizonyítása alapján nyilvánvaló, hogy a (2.1) egyenlethez létezik a konstans együtthatós lineáris visszacsatolásoknak egy olyan  $\{K_i\}_{i=0}^\infty$  sorozata, amelyekre a  $\frac{dx_{K_i}(t)}{dt} = (A + BK_i)x_{K_i}(t)$  differenciálegyenletek megoldásaival

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} = \sup_{x_{K_i}(0) = Q_2^{-\frac{1}{2}} v, \|v\|=1} \left( \lim_{i \rightarrow \infty} \int_0^\infty x_{K_i}^T(t) Q_1 x_{K_i}(t) dt \right) \quad \text{teljesül.}$$

(Például a  $K_i = -iB^T P_{\frac{1}{i}}$  sorozat megfelel.)

Ha  $A+BL$ -et írunk  $A$  helyére, akkor nyilvánvalóan a  $\{K_i - L\}_{i=0}^\infty$  sorozattal az infimumot kapjuk az új feladathoz, és ezzel a lemmát beláttuk.

### 3. $\bar{\alpha}$ felső korlátjának meghatározása

Legyen ebben a szakaszban  $Q_1 = Q_2 = Q$ , az (1.3) és (1.4) egyenleteket vizsgáljuk.

Legyen  $A$   $n \times n$ -es,  $B$   $n \times m$ -es mátrix, és az  $(A, B)$  pár legyen irányítható. Tegyük fel, hogy  $B$  oszlopai lineárisan függetlenek. A továbbiak megértéséhez szükségünk van a konstans együtthatós lineáris rendszerek kanonikus alakjának ismeretére. Általános mátrixok esetén ennek konstrukciója bonyolult, a továbbiak megértéséhez elegendő azt tudni, hogy létezik egy  $T$  hasonlósági transzformáció, hogy az

$$\bar{A} = T^{-1}AT, \quad \bar{B} = T^{-1}B$$

mátrixok elemeire valamilyen  $1 \leq \kappa_1 \leq \kappa_2 \leq \dots \leq \kappa_m = n$  egészekkel a következő összefüggések teljesülnek:

$$\bar{B}_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq \kappa_j \\ 1, & \text{ha } i = \kappa_j \end{cases} \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

$$\bar{A}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = j - 1 \text{ és } i \notin \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\} \\ 0, & \text{ha } i \neq j - 1 \text{ és } i \notin \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\} \\ \text{általános számok,} & \text{ha } i \in \{\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m\} \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n,$$



Például ha  $n = 5$ ,  $m = 2$ ,  $\kappa_1, \kappa_2 = 5$ , akkor belátható, hogy általános esetben

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c_2 & c_1 & 0 & d_2 & d_1 \end{bmatrix}$$

alakú, ahol  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$  valós konstansok.

**3.1. MEGJEGYZÉS.** A  $T$  transzformációs mátrix  $T = T_1 T_2$  alakban állítható elő, ahol a  $T_1$  mátrix olyan, hogy oszlopai az  $[A^{n-1}B, A^{n-2}B, AB, B]$  mátrix  $n$  daraboszlopával egyeznek meg.  $B$  minden oszlopa szerepel benne, és ha az  $A^k B_j$  oszlop szerepel, akkor minden  $A_i B_j$   $i \leq k$  is. A  $T_2$  mátrix fődiagonalisában egyesek állnak, a többi elem csak — a később  $\bar{A}$  oszlopaiban megjelenő — „általános elemektől” függ. Ha  $m = 1$ , akkor  $B$  oszlopvektor, és ezért  $T_1 = [A^{n-1}B, A^{n-2}B, \dots, AB, B]$  egyértelmű. Ha  $m > 1$  akkor az  $\bar{A}$  és  $\bar{B}$  mátrixokból álló kanonikus alak és a  $T_1, T_2$  transzformációs mátrixok általában nem egyértelműen meghatározottak. További részletek például [2]-ben találhatók.

Jelöljük  $H$ -val az  $A_1$  mátrix  $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_m$  sorából összeállított  $m \times n$ -es mátrixot. A 2.6. lemma alapján az  $A_I \stackrel{\text{def}}{=} T(\bar{A} - \bar{B}H)T^{-1} = A - BHT^{-1}$  mátrix ugyanazt az  $\bar{\alpha}$  értéket adja, mint  $A$ . Viszont  $A_I$  összes sajátértéke nulla, hiszen hasonló az  $\bar{A}_I \stackrel{\text{def}}{=} \bar{A} - \bar{B}H$  mátrixhoz, ami ebben a formában nemcsak kanonikus alakja  $A_I$ -nek, hanem Jordan-féle normálalakja is, és minden Jordan-féle blokkjához nulla sajátérték tartozik.

Helyettesítsük a 2.1. rendszer  $A$  mátrixát  $A_I$ -gyel, és vezessük be az  $y(\cdot) = T^{-1}x(\cdot)$  változót. A  $\frac{dy(t)}{dt} = (\bar{A}_I + \bar{B}K)y(t)$  differenciálegyenletet megoldásaival

(3.2)

$$\frac{1}{\bar{\alpha}} = \sup_{y(0)=T^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}v, \|v\|=1} \left( \inf_{K \in S(\bar{A}_I, B)} \int_0^\infty y^T(t) \bar{Q} y(t) dt \right) \quad \text{adódik,}$$

ahol  $\bar{Q} = T^T Q T$ .

**3.1. TÉTEL.** Tekintsük az (1.1) és (1.2) összefüggésekben szereplő mátrixokat. Tegyük fel, hogy  $m < n$ . Ekkor teljesül az

$$(3.3) \quad \bar{\alpha} \leq \text{cond}_2(T^T Q T)$$

egyenlőtlenség, ahol  $T$  az  $(A, B)$  pár kanonikus alakra hozásakor végzendő transzformáció mátrixa. (Ha  $T$  nem egyértelmű akkor bármelyik megfelel.)

**Bizonyítás.** A  $Q$  mátrix pozitív definit, ezért  $\bar{Q}$  is az, hiszen a  $T$  mátrix nonszinguláris. Így  $\lambda_{\min}(\bar{Q}) > 0$ . Az  $m < n$  feltétel miatt az  $\bar{A}_I$  mátrixnak van olyan diagonális feletti eleme, amelyik nem nulla. Legyen az  $i$ . sor az első olyan, amelyikben nem minden elem nulla, hanem  $(\bar{A}_I)_{i,i+1} = 1$ .

A (3.2) egyenlet alapján a következőket írhatjuk:

$$(3.4) \quad \frac{1}{\alpha} \geq \lambda_{\min}(\bar{Q}) \sup_{y(0)=T^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}v, \|v\|=1} \left( \inf_{K \in \mathcal{S}_{(\bar{A}_I, \bar{B})}} \int_0^{\infty} y^T(t)y(t) dt \right) \geq J \stackrel{\text{def}}{=} \\ \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_{\min}(\bar{Q}) \sup_{z(0)=T^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}v, \|v\|=1} \left( \inf_{K \in \mathcal{S}_{(\bar{A}_I, \bar{B})}} \int_0^{\infty} z_i^2(t) + z_{i+1}^2(t) dt \right), \\ \text{ahol } \frac{dy(t)}{dt} = (\bar{A}_I + \bar{B}K)y(t); \quad \frac{dz(t)}{dt} = (\bar{A}_I + \bar{B}K)z(t)$$

hiszen a célfüggvények mátrixának különbsége pozitív szemidefinit.

A következőkben belátjuk, hogy az egyenlőtlenségsor utolsó feladatában szereplő infimum értékére

$$\inf_{K \in \mathcal{S}_{(\bar{A}_I, \bar{B})}} \int_0^{\infty} (z_i^2(t) + z_{i+1}^2(t)) dt \geq z_i(0)^2 \quad \text{teljesül.}$$

Az  $\bar{A}_I$  és  $\bar{B}$  mátrixok speciális struktúrája miatt  $\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{i+1}(t)$ , az  $i+1$ . sorra vonatkozóan pedig két eset lehetséges. Ha  $\bar{A}_I$   $i+1$ . sorában nem minden eleme nulla, akkor csak  $(\bar{A}_I)_{i+1, i+2} = 1$ . Ebben az esetben  $\bar{B}$   $i+1$ . sora azonosan nulla, és  $\frac{dz_{i+1}(t)}{dt} = z_{i+2}(t)$ . Vezessük be a  $w(\cdot) = z_{i+2}(\cdot)$  jelölést.

Ha viszont  $\bar{A}_I$   $i+1$ . sorában minden eleme nulla, akkor  $\bar{B}$   $i+1$ . sorában van egy egyes is, és  $\frac{dz_{i+1}(t)}{dt} = u_k(t)$  valamely  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ -re. Most legyen  $w(\cdot) = u_k(\cdot)$ .

A fent bevezetett jelölésekkel a következő egyenleteket kapjuk:

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = z_{i+1}(t) \\ \frac{dz_{i+1}(t)}{dt} = w(t).$$

A 2.5. lemmával összevetve adódik az állítás. Azért áll egyenlőtlenség, mert első esetben  $w(\cdot)$  a szokásosnál szűkebb függvényterbe tartozik, hiszen kezdeti értéke (esetleg deriváltjainak kezdeti értéke is) adott.

Ezen megjegyzés után visszatérve a tétel bizonyításához vegyük észre, hogy a (3.4) egyenlőtlenségláncba beírva  $\frac{1}{\alpha} \geq \lambda_{\min}(\bar{Q}) \cdot \sup_{z(0)=T^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}v, \|v\|=1} (z_i^2(0))$  adódik.

Legyen  $v = \frac{Q^{\frac{1}{2}}Te_i}{\|Q^{\frac{1}{2}}Te_i\|}$ , ahol  $e_i$  az  $i$ . egységvektor. Ezzel a konkrét vektorral biztosan nem kapunk nagyobbát a szuprémmumnál:

$$\frac{1}{\alpha} \geq \lambda_{\min}(\bar{Q}) \cdot \sup_{z(0)=T^{-1}Q^{-\frac{1}{2}}v, \|v\|=1} (z_i^2(0)) \geq \frac{\lambda_{\min}(\bar{Q})}{e_i^T T^T Q T e_i} \geq \frac{\lambda_{\min}(\bar{Q})}{\lambda_{\max}(\bar{Q})}$$

. Így  $\frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\text{cond}_2(T^T Q T)}$ . Ezzel a tételt beláttuk.

3.2. MEGJEGYZÉS. *Mozgásegyenletek linearizálása, és elsőrendű egyenletté való alakítása után*  $A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2 \end{bmatrix}$  alakú lesz. (Minden blokk  $n \times n$ -es.) Könnyű belátni, hogy ekkor a  $T$  mátrix ortogonális lesz, és ezért

$$\bar{\alpha} \leq \text{Cond}_2(Q)$$

érvényes.

3.2. TÉTEL. *Tegyük fel, hogy az (1.1) és (1.2) összefüggésekben szereplő mátrixokkal teljesülnek az*

$$(3.4) \quad XA + A^T X + Q - \gamma X B B^T X = 0$$

$$(3.5) \quad Q \geq \beta X$$

*összefüggések, ahol  $\gamma$  tetszőleges pozitív szám. Ekkor  $\beta \leq \text{cond}_2(T^T Q T)$ .*

*Bizonyítás.* Legyen  $K = -\frac{\gamma B^T X}{2}$ . Ezzel a (3.4) egyenlet az  $X(A + BK) + (A + BK)^T X + Q = 0$  alakot ölti, ami megfelel (1.3)-nak. A  $K \in S_{(A,B)}$  feltétel is teljesül, hiszen  $X$  pozitív definit, és a  $(\sqrt{Q}, A + BK)$  pár teljesen megfigyelhető.

Az eredeti feladatban a  $K$  mátrixok értelmezési tartománya a teljes  $S_{(A,B)}$  halmaz volt, most  $K$  rögzített, tehát nyilvánvalóan

$$\beta \leq \bar{\alpha} = \text{cond}_2(T^T Q T).$$

#### 4. Szükséges feltétel $\bar{\alpha} = \infty$ teljesülésére

Tekintsük az (1.5.) és (1.6.) egyenleteket. Tegyük fel, hogy a  $(\sqrt{Q_1}, A)$  pár teljesen megfigyelhető, különben korlátozzuk a vizsgálatot a megfigyelhető alálterre.

4.1. TÉTEL. *Ha  $\bar{\alpha} = \infty$ , akkor a rendszerhez létezik egy olyan  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mátrix, hogy  $C^T C = Q_1$ , és minden pozitív  $\varepsilon$ -hoz létezik olyan  $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$  és  $s_0 > 0$  valós szám, hogy  $\|K\| < \varepsilon$ , és*

$$A - B(K + C)s \quad \text{stabilis, ha } s > s_0$$

*Bizonyítás.*  $\bar{\alpha} = \infty$  csak úgy lehet, ha a 2.4. lemmában szereplő  $P_\eta$ -ra igaz a  $P_0 = \lim_{\eta \rightarrow 0} P_\eta = 0$  összefüggés. Képezzük a 2.2. egyenletben az  $\eta \rightarrow 0$  határátmenetet:

$$Q_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} P_\eta B B^T P_\eta \quad \text{adódik.}$$

Legyen  $C = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\eta}} B^T P_\eta$ . Ez nyilván létezik a fentiek alapján. Legyen  $\varepsilon$  tetszőleges pozitív szám. A konvergencia miatt létezik olyan pozitív  $\bar{\eta}$ , hogy

$$\left\| C - \frac{1}{\sqrt{\eta}} B^T P_\eta \right\| < \varepsilon, \quad \text{ha } 0 < \eta < \bar{\eta}.$$

Legyen  $K = \frac{1}{\sqrt{\eta}} B^T P_\eta - C$ . Az  $A - sB(K + C) = A - \frac{s}{\sqrt{\eta}} BB^T P_\eta$  mátrix valóban stabilis, ha  $s \geq s_0 = \frac{1}{\sqrt{\eta}}$ , hiszen a (2.2) egyenlet átrendezésével

$$\left(A - \frac{s}{\sqrt{\eta}} BB^T P_\eta\right)^T P_\eta + P_\eta \left(A - \frac{s}{\sqrt{\eta}} BB^T P_\eta\right) + Q_1 + \left(\frac{2s}{\sqrt{\eta}} - \frac{1}{\eta}\right) P_\eta BB^T P_\eta = 0$$

adódik, és Ljapunov tételéből következik a stabilitás.

4.1. MEGJEGYZÉS. Az előző tételből nyilvánvaló, hogy ha  $\text{rang}(Q_1) > \text{rang}(B)$ , akkor  $\bar{\alpha} < \infty$ , és ezzel beláttuk, hogy éppen a gyakorlati szempontból fontos esetekben ütköztünk korlátokba a vizsgált módszer alkalmazásakor.

A jelenség magyarázatához térjünk vissza a pozitív definit  $Q$  mátrix esetéhez. Annak ellenére, hogy az  $A + BK$  mátrix sajátértékeit tetszőlegesen megválaszthatjuk, a  $\int_0^\infty e^{(A+BK)^T t} Q e^{(A+BK)t} dt$  mátrix normáját nem tudjuk tetszőlegesen kicsívé tenni. Pedig, ha például az  $A + BK$  mátrix diagonális lenne,  $-\infty$ -hez tartó elemekkel, akkor nyilván nullához tartana az integrál. A probléma hététerében az van, hogy amikor az  $A + BK$  mátrix sajátértékeit változtatjuk, akkor nemcsak a mátrix Jordan-féle normálalakja és ezzel a sajátértékei változnak, hanem a hozzá tartozó transzformációs mátrix is. Ha viszont a transzformációs mátrix változtatása nélkül is tudjuk csökkenteni a sajátértékek valós részét, akkor  $\bar{\alpha} = \infty$  lehet. Ez azonban csak a  $\text{rang}(B) = n$  esetben lehetséges, például ha  $A = 0$  és  $B = I_{n \times n}$ .

Vizsgálataink rámutattak az eredmények kapcsolatára az olcsó irányítások elméletével. Ha az (1.7) egyenlet mátrixaira nem teljesülnek a 4.1. tételben megfogalmazott feltételek (például ha  $\text{rang}(Q) > \text{rang}(B)$ ), akkor az irányítás súlyának csökkentésével általában nem lehet az optimális célfüggvényértéket nullához tetszőlegesen közelívé tenni.

## IRODALOM

- [1] RAN, A.C.M., VREUGDENHIL, R., „Existence and comporation theorems for Algebraic Riccati equations for continuous and discrete-time systems”, *Linear Algebra and its Applications* **99** (1989), 63–83.
- [2] RUSSEL, D.L., *Mathematics of finite-dimensional control systems*, Marcel Dekker, New York, 1979.
- [3] GYURKOVICS, É., *Irányításmélet*, BME Gépészmérnöki Kar, jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [4] ZHIHUA QU, DORSEY, J., „Robust tracking control of robots by a linear feedback law”, *Transactions on Automatic Control* **36** (1991), 1081–1084.
- [5] KALMAN, R.E., BERTRAM, J.E., „Control System Analysis and Design Via the „Second Method” of Lyapunov”, *Journal of Basic Engeneering* June (1960), 371–393.

(Beérkezett: 1995. január 25.)

LÁSZLÓ ÁKOS  
 ELTE OPERÁCIÓKUTATÁS TANSZÉK  
 BUDAPEST, MŰZEUM KRT.6.

# TIME-CONSTANTS FOR THE QUADRATIC LYAPUNOV-FUNCTIONS

Á. LÁSZLÓ

The paper is devoted to study the question of achievable ("best", exponential) speed of decrease of a quadratic Lyapunov function for linear time invariant system. Among others it will be proved, that if  $(A, B)$  is controllable,  $\text{rank}(B) < n$ , and  $Q$  is positive definite, moreover  $K$  is such, that  $A + BK$  is stable, and for the solution  $P$  of the equation

$$P(A + BK) + (A + BK)^T P + Q = 0 \quad Q \geq \alpha P$$

holds for given  $(A, B, Q)$  then necessarily

$$\alpha \leq \text{Cond}_2(T^T Q T)$$

where  $T$  is one of the matrices transforming  $(A, B)$  to a specific canonical form.



# PERIODIKUS MEGOLDÁSOK MAY-LEONARD TÍPUSÚ POPULÁCIÓDINAMIKAI MODELLEKBEN

SZENTKUTI ZSOLT

Budapest

A dolgozatban egy a nulla izoklinák geometriáján alapuló osztályozást alkalmazva megvizsgáljuk mikor keletkezik Hopf-bifurkáció May-Leonard rendszerekben. A második fejezetben röviden ismertetjük a May-Leonard modell felépítését. A harmadik fejezetben mutatjuk be a fent említett osztályozási módszert. A negyedik fejezetben először a hagyományos May-Leonard modellt vizsgáljuk az új módszerrel, részben megismételve a klasszikus eredményeket. Ezután a modell egy nem szimmetrikus általánosítására alkalmazva az eljárást szükséges feltételt adunk Hopf-bifurkáció megjelenésére.

## 1. Bevezetés

Következő cikkünkben megkísérlünk néhány kiegészítést adni a háromdimenziós zsákmány-ragadozó rendszerek R. M. May és W. J. Leonard által vizsgált esetéhez [4], [6] és megvizsgáljuk hogyan öröklődnek az eredeti rendszer tulajdonságai általánosabb, nem szimmetrikus esetben.

A populációdinamikai modellek általában abból indulnak ki, hogy a populáció növekedési sebessége arányos a populáció méretével és az arányossági tényező a fejenkénti („per capita”) növekedési ráta. Jelöljük  $x(t)$ -vel a populáció méretét tetszőleges  $t$  időpontban (célszerűen nem az egyedszámot, hanem az egyedek alkotta biomasszáját) és  $N(x)$ -szel a fejenkénti növekedési rátát. Ekkor magától értetődően  $x(t) \geq 0$  és a populáció dinamikáját a következő közönséges differenciálegyenlet írja le:

$$(1.1) \quad \dot{x}(t) = N(x) \cdot x(t),$$

ahol a pont idő szerinti deriváltat jelöl.

Térjünk át ezután az  $n$  dimenziós esetre. Jelölje  $x = \text{col}[x_1, \dots, x_n]$  az  $R^n$ -beli vektorokat és  $R_+^n$  a zárt pozitív kúpot  $R^n$ -ben:  $R_+^n = \{x \in R^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ , legyen továbbá  $R^n$ -ben a nyílt pozitív kúp:  $\text{Int}R_+^n = \{x \in R_+^n : x_i \neq 0, \forall i = 1, \dots, n\}$ . Egy vektort pozitívnak, illetve szigorúan pozitívnak nevezünk, ha  $x \in R_+^n$  illetve  $x \in \text{Int}R_+^n$ . Ezekkel a jelölésekkel  $n$  egymással kölcsönhatásban lévő faj együttélését a következő  $n$  dimenziós közönséges differenciálegyenlet rendszer modellezi (Kolmogorov rendszer):

$$(1.2) \quad \dot{x}_i = x_i \cdot N_i(x) \quad i = 1, \dots, n.$$

Mivel biológiai rendszerről van szó:  $x \in R_+^n$ . Az  $i$ -edik és  $j$ -edik faj közti kapcsolatot a  $\text{sgn} \left( \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \right)$  és a  $\text{sgn} \left( \frac{\partial N_j}{\partial x_i} \right)$  értékek mutatják. Ha mindkettő pozitív, akkor a két faj



kooperál, míg ha mindkettő negatív, akkor verseng egymással. Ha ellenkező előjelűek, akkor a fajok közt zsákmány-ragadozó kapcsolat van. Az összes ilyen kapcsolatot leíró  $DN = \left( \frac{\partial N_i}{\partial x_j} \right)_{i,j=1}^n$  mátrixot nevezzük a rendszer együttélési mátrixának.

Számos publikáció és könyv foglalkozott ilyen és ebből származó speciális modellek felállításával és elemzésével [1], [2], [5]. A rendszer hosszú távú viselkedésének leírására igen elterjedt és bevált a fixpontok stabilitásának elemzése *Ruth-Hurwitz kritérium* alapján, vagy az esetleges kialakuló zárt pályák megkeresése a *Poincaré-Bendixson elmélet* illetve az *Andronov-Hopf tétel* alapján.

Ezen módszerek alkalmazása azonban már kis  $n$  esetén is komoly algebrai nehézségekbe ütközik, ha nincsenek bizonyos szimmetria feltételeink, amelyek csökkentik a rendszerben található paraméterek számát. Célunk az lesz, hogy a speciális háromdimenziós May-Leonard rendszer tulajdonságait vizsgáljuk a szimmetria tulajdonságok egy részének elhagyása esetén. Alkalmazni fogunk egy *M. L. Zeeman*tól származó osztályozási módszert [7], amely a nulla izoklínák konfigurációja alapján egyszerű algebrai feltételeket ad egy rendszer hosszú távú viselkedésének leírására.

Cikkünkben először bemutatjuk az ismert May-Leonard rendszert és megmutatjuk, hogy az eredeti cikkben leírt zárt pályák egy degenerált Andronov-Hopf bifurkációval keletkeznek.

Ezután röviden ismertetjük *M. L. Zeeman* osztályozási módszerét, mely alkalmas a rendszer dinamikájának leírására az eltartási szimplexén. Illusztrációként alkalmazzuk a módszert a közönséges May-Leonard rendszerre.

A következő részben elhagyunk bizonyos szimmetria feltételeket a modellből és megvizsgáljuk a kapott rendszert, elemezve milyen tulajdonságai öröklődnek a szimmetrikus rendszernek.

## 2. A May-Leonard modell

A bevezetésben említett Kolmogorov rendszerek egy speciális esete a *Lotka-Volterra rendszer*, amely  $n$  faj esetén a következő alakú:

$$(2.1) \quad \frac{dx_i(t)}{dt} = r_i \cdot x_i(t) \left[ 1 - \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_j(t) \right] \quad i = 1, \dots, n$$

A rendszerben  $\alpha_{ij}$  a  $j$ -edik faj hatását jelzi az  $i$ -edik faj növekedési rátájára, míg  $r_i$  az  $i$ -edik faj belső növekedési rátája.

Három faj esetén általános esetben a modell 12 paramétert tartalmaz, melyekből 4 kiküszöbölhető az  $x_i(t)$  egyedszámok és a  $t$  idő megfelelő normálásával. A rendszer algebrai kezelhetősége érdekében további egyszerűsítő feltételekre lesz szükségünk. Induljunk ki a következő szimmetria feltételekből:

- 1) a fajok belső növekedési rátája egyenlő:  $r_1 = r_2 = r_3 = r > 0$

- 2) a második faj hatása az első növekedésére egyenlő a harmadik faj hatásával a második növekedésére, ami egyenlő az első faj hatásával a harmadik növekedésére:  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = \alpha$
- 3) az első faj hatása a második növekedésére egyenlő a második faj hatásával a harmadik növekedésére, ami egyenlő a harmadik faj hatásával az első növekedésére:  $\alpha_{21} = \alpha_{32} = \alpha_{13} = \beta$

Skálázzuk ezután úgy az  $x_i$ -edik populációt, hogy  $\alpha_{ii} = 1$ , az időt pedig úgy, hogy  $r = 1$  legyen. Ezekkel a feltételekkel az alábbi két paraméteres rendszert kapjuk [4]:

$$(2.2) \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_1 \cdot (1 - x_1 - \alpha \cdot x_2 - \beta \cdot x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} = x_2 \cdot (1 - \beta \cdot x_1 - x_2 - \alpha \cdot x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = x_3 \cdot (1 - \alpha \cdot x_1 - \beta \cdot x_2 - x_3) \end{cases}$$

Három kölcsönösen versengő faj esetén  $\alpha > 0$  és  $\beta > 0$ . A rendszer nulla izoklínái rendre két síkból állnak, például az  $x_1 = 0$  izoklína az  $x_1 = 0$  és  $x_1 + \alpha \cdot x_2 + \beta \cdot x_3 = 1$  síkból. Az egyensúlyi helyzetek meghatározhatóak, mint a nulla izoklínák metszéspontjai. Ezek alapján négy típusba lehet sorolni a fixpontokat:

- 1) az  $O$ :  $\text{col}[0, 0, 0]$ , amely mindhárom faj kihalását jelenti
- 2) az  $R_1$ :  $\text{col}[1, 0, 0]$ ,  $R_2$ :  $\text{col}[0, 1, 0]$ ,  $R_3$ :  $\text{col}[0, 0, 1]$  egyensúlyi helyzetek, melyek egyetlen faj fennmaradását reprezentálják. Helyzetük alapján ezeket szokás tengelybeli fixpontoknak is nevezni.
- 3) a  $Q_1$ :  $\frac{1}{\alpha \cdot \beta - 1} \text{col}[0, \alpha - 1, \beta - 1]$ ,  $Q_2$ :  $\frac{1}{\alpha \cdot \beta - 1} \text{col}[\beta - 1, 0, \alpha - 1]$ ,  $Q_3$ :  $\frac{1}{\alpha \cdot \beta - 1} \text{col}[\alpha - 1, \beta - 1, 0]$ , melyeknél két faj tartósan együtt él. Természetesen ezek a fixpontok csak olyan  $\alpha$  és  $\beta$  értékekre léteznek a mi szempontunkból, ha a pozitív kúpba esnek, azaz ha  $\alpha > 1$  és  $\beta > 1$ . Ezeket helyzetük alapján síkbeli fixpontoknak hívják.
- 4) a  $P$ :  $\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \text{col}[1, 1, 1]$  egyensúlyi helyzet, melynél a három faj tartósan együtt él. Ennek a pontnak a neve belső fixpont.

A fixpontok stabilitási tulajdonságai a jól ismert módszerrel meghatározhatóak az egyes pontokban linearizált rendszer stabilitási jellemzőiből [1]. A  $P$  pontban a linearizált rendszer:

$$(2.3) \quad \dot{y} = -\frac{1}{\alpha + \beta + 1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} \cdot y,$$

ahol  $y = \text{col}[y_1, y_2, y_3]$ . Tehát a  $P$  pont stabilitását az

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix}$$

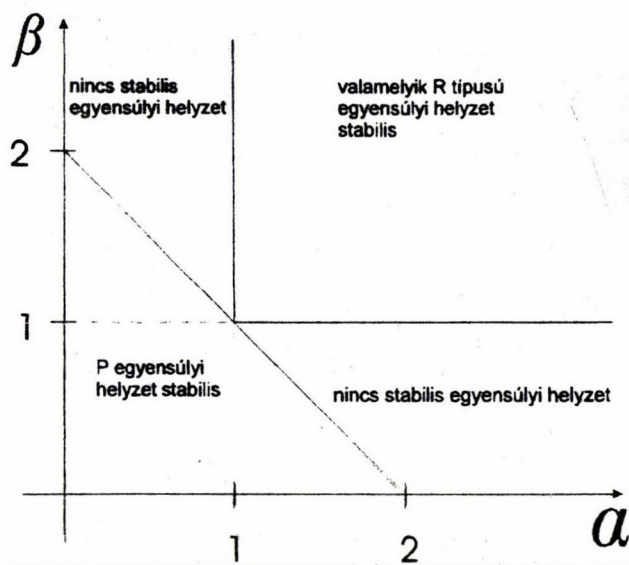
mátrix sajátértékeinek előjele dönti el. Mivel  $-\frac{1}{\alpha + \beta + 1} < 0$ , így a stabilitás feltétele valamely sajátirányban, hogy az adott irányhoz tartozó sajátérték pozitív legyen. Mivel

az  $A$  mátrix cirkuláris, így sajátértékei viszonylag egyszerűen adódnak:

$$\lambda_1 = 1 + \alpha + \beta$$

$$\lambda_{2,3} = 1 - \frac{\alpha + \beta}{2} \pm i \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{2}(\alpha - \beta) \right).$$

Feltevésünk szerint  $r > 0$ , így sem az  $O$  sem valamelyik  $Q_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) egyensúlyi helyzet nem lehet stabilis. Kimutatható, hogy a  $P$  egyensúlyi helyzet létezik és stabilis, ha  $\alpha + \beta < 2$ . Azt is be lehet bizonyítani, hogy ha  $\alpha > 1$  és  $\beta > 1$ , akkor a rendszer valamelyik tengelybeli egyensúlyi helyzethez konvergál, viszont ha  $\alpha + \beta \geq 2$  és  $\alpha > 1$ ,  $\beta < 1$  vagy  $\alpha < 1$ ,  $\beta > 1$ , akkor nincs stabilis egyensúlyi helyzet (lásd 1. ábra).



1. ábra Az egyensúlyi helyzetek stabilitása a May-Leonard modellben

A továbbiakban azt az esetet tekintjük May-Leonard rendszernek, amelyre  $\alpha + \beta \geq 2$  és  $\alpha < 1$ ,  $\beta > 1$  (a teljes szimmetria miatt az  $\alpha > 1$ ,  $\beta < 1$  esettel külön nem foglalkozunk).

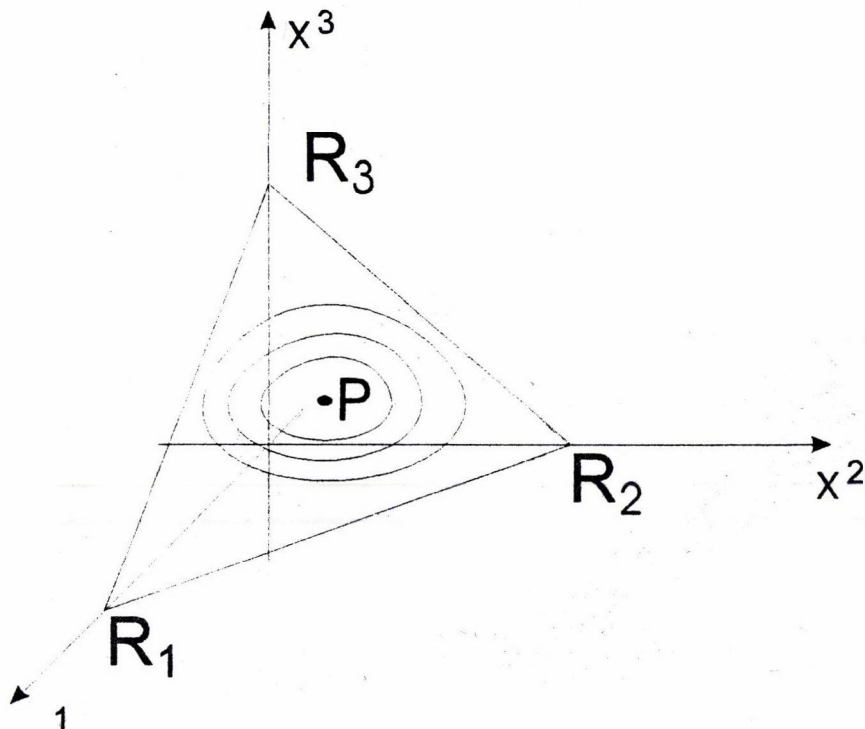
Vizsgáljuk meg, mikor keletkezik Hopf-bifurkáció a rendszerben. Ellenőrizve az Andronov-Hopf tétel feltételeit ([1], [2]) ha  $\alpha + \beta = 2$ :

- (i)  $\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = 0$ ,  $\operatorname{Re} \lambda_1 = -1 < 0$
- (ii) legyen  $\mu = 2 - (\alpha + \beta)$  a bifurkációs paraméter, ekkor

$$\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = \frac{\mu}{2} \text{ és } \frac{d(\operatorname{Re} \lambda_{2,3})}{d\mu} = \frac{1}{2} > 0.$$

Tehát az  $\alpha + \beta = 2$  esetben zárt pályák keletkeznek Hopf-bifurkációval.

Ha a Bautyin-formulával ([1]) kiszámoljuk a 4. Poincaré-Ljapunov konstanst:  $G_4 = 0$  lesz az eredmény. Tehát  $\alpha + \beta = 2$  esetén olyan degenerált (sem szuper-, sem szubkritikus) Hopf-bifurkáció keletkezik, ahol a központi sokaságot zárt pályák töltik ki (lásd 2. ábra).

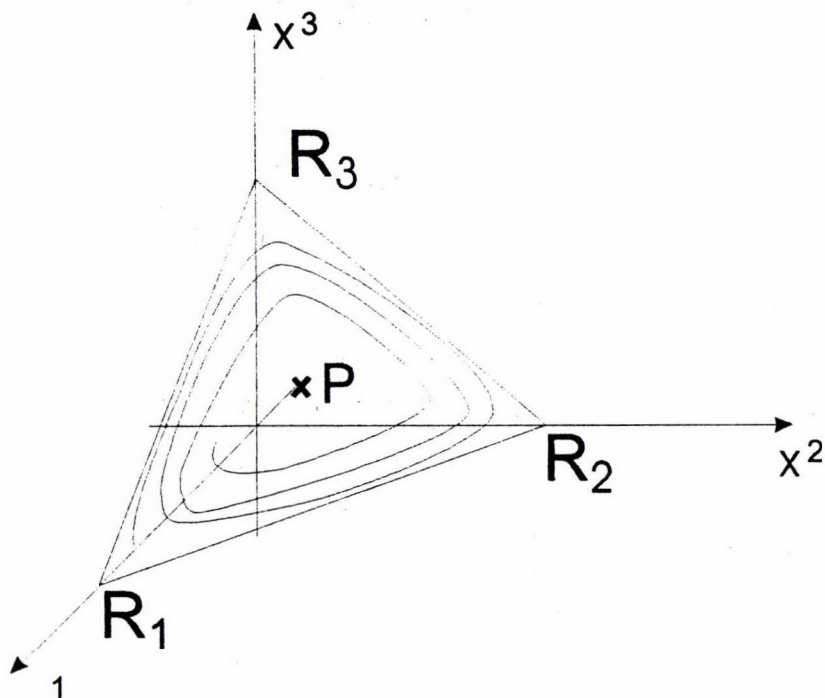


2. ábra Degenerált Hopf-bifurkáció a May-Leonard modellben

A továbbiakban May, Leonard és Schuster, Sigmund, Wolf megmutatta cikkében, ha  $\alpha + \beta > 2$ , akkor a rendszerben nemlineáris viselkedés lép föl. Olyan pályák keletkeznek, amelyek ciklikusan rendre megközelítik az  $R$  típusú egyensúlyi helyzeteket, vagyis két faj majdnem kihal egy pedig elszaporodik. A ciklikusság azonban nem szabályos, az egyes fixpontok közelében eltöltött idő egyre hosszabb lesz (lásd 3. ábra).

A három  $R$ -típusú egyensúlyi helyzetet heteroklinikus pályák kötik össze és a belső egyensúlyi helyzet közeléből induló megoldások pályagörbéi erre a heteroklinikus ciklusra csavaródnak fel.

Természetesen valós populációban, ahol mindig fellépnek bizonyos perturbációk, illetve a változóink nem folytonosak (egyedszám a biomassa helyett), a rendszer nem közelítheti meg tetszőleges pontossággal az egyensúlyi helyzeteket, hanem véges időn belül két faj kihal,



3. ábra Nem lineáris, ciklikus pályák a May-Leonard rendszerben

egy pedig stabilisan fennmarad. Az hogy melyik hal ki és melyik marad fenn, a természetes populációkban fellépő véletlen hatásokon múlik.

### 3. A háromdimenziós Lotka-Volterra rendszerek osztályozása a nulla izoklínák alapján

Bár, mint említettük, jól bevált módszerek léteznek a háromdimenziós Lotka-Volterra rendszerek vizsgálatára, a fellépő algebrai nehézségek gyakran igen bonyolulttá teszik használatukat.

M. L. Zeeman [7] egy olyan osztályozást ad, amely egyszerű algebrai kifejezések alapján lehetővé teszi a háromdimenziós kompetitív Lotka-Volterra rendszerek viselkedésének leírását az eltartási szimplexen, vagy legalábbis annak határán. Az elmélet ismertetését néhány alapvető definícióval és tétellel kezdjük [1], [5], [7].

**3.1. Definíció.** Jelölje  $\chi(M)$  egy  $M$  sokaságon folytonosan differenciálható vektorme-

zőket. Ekkor az  $n$  dimenziós kompetitív Lotka-Volterra rendszerek tere:

$$CLV(n) = \left\{ F \in \chi(R_+^n) : F_i(x) = x_i \cdot \left( b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \mid a_{ij} > 0, b_i > 0, (i, j = 1, \dots, n) \right\},$$

továbbá két  $CLV(n)$ -beli rendszer távolságát értelmezzük a következő módon:  $\rho(F, G) = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij} - \tilde{a}_{ij}| + \sum_{i=1}^n |b_i - \tilde{b}_i| \right)$ , ahol  $F, G \in CLV(n)$  és  $a_{ij}, b_i$  illetve  $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$  rendre  $F$  és  $G$  megfelelő együtthatóit jelöli.

Az  $F \in \xi(M)$  differenciálható vektormező egy  $n$  dimenziós közönséges differenciálegyenlet rendszert definiál:

$$(3.1) \quad \dot{x} = F(x)$$

A rendszernek egy  $\varphi : R \mapsto M$  megoldását jelöljük  $\varphi$ -vel,  $\varphi_t(y)$ -nal pedig egy  $y$  kezdőértékhez tartozó megoldását. Jelölje továbbá az  $y$  kezdőértékhez tartozó alfa és omega határhalmazokat  $\alpha(y)$  és  $\omega(y)$ . A 3.1 rendszert kompetitívnek nevezzük, ha  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \leq 0$ , kooperatívnek ha  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \geq 0$  bármely  $i \neq j$  esetén. Disszipatívnek nevezzük a rendszert, ha létezik egy kompakt, invariáns halmaz, amely vonzza a kezdőértékek összes kompakt részhalmazát.

Vezessük be a következő jelölést: legyen az origó repellor egy disszipatív rendszerben, ekkor taszítási tartománya nyilvánvalóan korlátos. Jelöljük  $\Sigma$ -val az origó medencéjének határát  $t \rightarrow -\infty$  esetén, azaz legyen  $R(0) = \{x \in R_+^n \mid \alpha(x) = 0\}$  az origó medencéje, ekkor  $\Sigma = \partial R(0) \setminus R(0)$ .

M. W. Hirsch következő jól ismert tétele [5] olyan egy kodimenziójú hiperfelület létezését mondja ki, amely vonzza az összes véges pályát  $R_+^n$ -ban:

3.1. TÉTEL. (Hirsch) Legyen  $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i \cdot N_i(x)$   $i = 1, \dots, n$  egy kompetitív disszipatív rendszer  $R_+^n$ -on, amelyre az origó repellor és a  $DN$  (speciálisan ha  $F \in CLV(n)$ , akkor  $DN = -A$ ) mátrixnak szigorúan negatív értékei vannak bármely más fixpontban. Ekkor az  $R_+^n \setminus \{0\}$  tartományon minden trajektória aszimptotikusan tart egy  $\Sigma$ -beli trajektóriához és  $\Sigma$  homeomorf az egységsimplexszel  $R_+^n$ -ben radiális vetítéssel.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha speciálisan az  $\dot{x} = F(x)$  rendszerben  $F \in CLV(n)$ , akkor minden trajektória az  $R_+^n \setminus \{0\}$  tartományban aszimptotikusan tart egy  $\Sigma$ -belihez és  $\Sigma$  homeomorf az egységsimplexszel  $R_+^n$ -ban radiális vetítéssel.

Térjünk át ezután a háromdimenziós kompetitív Lotka-Volterra modellek vizsgálatára, azaz vizsgáljuk a következő egyenletet:

$$(3.2) \quad \dot{x}_i = F_i(x) = x_i(b_i - (Ax)_i) \quad i = 1, 2, 3.$$

Értelmezzük a nulla izoklína konfigurációt és ez alapján az osztályozást a következő módon:

3.3. *Definíció.* A (3.2) egyenlethez rendelt

$$(3.3) \quad \begin{aligned} R_{ij} &= \operatorname{sgn}((AR_i)_j - b_j) \\ Q_{ii} &= \operatorname{sgn}((AQ_i)_i - b_i) \end{aligned}$$

értékek rendszerét az egyenlet nulla izoklína konfigurációjának nevezzük, minden  $i \neq j$  esetén, az indexek egész értékű permutációja mellett.

3.4. *Definíció.* Legyen  $F, G \in CLV(3)$ . Azt mondjuk, hogy  $F$  és  $G$  nulla izoklína ekvivalensek, ha ugyanaz a nulla izoklína konfigurációjuk.  $F$ -et nulla izoklína stabilisnak tekintjük, ha létezik nulla izoklína ekvivalensekből álló környezete  $CLV(3)$ -ban.

3.3. *TÉTEL.* Tegyük fel, hogy  $F \in CLV(3)$  nulla izoklína stabilis és létezik egy  $P$  fixpontja. Ekkor  $P$  egyszerű fixpont. (A  $P$  pont akkor és csak akkor egyszerű, ha a linearizált rendszer mátrixának az adott pontban nincs nulla sajátértéke.)

Megjegyezzük, hogy az utóbbi tétel dinamikai jelentősége, hogy  $\operatorname{Int}\Sigma$ -ban bármely határhalmaz vagy  $P$  vagy egy periodikus pálya. Az előzőekben értelmezett stabilis nulla izoklína osztályok megkereséséhez ad eszközt a következő tétel:

3.4. *TÉTEL.* Legyen  $F \in CLV(3)$ . Az  $F$  nulla izoklína stabilis akkor és csak akkor, ha  $R_{ij} \neq 0$  bármely  $i \neq j$ -re és  $Q_{ii} \neq 0$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ .

A tételnek bizonyítható két igen fontos következménye:

3.2. *KÖVETKEZMÉNY.* A stabilis nulla izoklína osztályok uniója nyílt és sűrű  $CLV(3)$ -ban.

3.3. *KÖVETKEZMÉNY.*  $CLV(3)$ -ban 33 stabilis nulla izoklína osztály van.

A fenti stabilis nulla izoklína osztályokból 25-ben a  $P$  belső fixpont nyeregpontról típusú és így zárt pálya nem lehet  $\Sigma$  belsejében, vagyis a nulla izoklína konfiguráció egyértelműen meghatározza a rendszer dinamikai viselkedését  $\Sigma$  tartományon és határán. A maradék 8 osztályban a nulla izoklína konfiguráció nem tartalmaz elegendő információt  $P$  egyensúlyi helyzet dinamikai jellegének eldöntésére. Ezekben az osztályokban tehát nem írható le a dinamikai viselkedés  $\Sigma$  belsejében kizárólag a nulla izoklína konfiguráció alapján.

Foglalkozunk most a 8 osztállyal. A következő tételek lehetőséget adnak, hogy egy rögzített nulla izoklína konfigurációhoz tartozó rendszer családban előrejelezzük a Hopf bifurkáció keletkezését.

3.5. *TÉTEL.* A fenti 8 nulla izoklína osztályba tartozó rendszerekről feltehetjük, hogy a  $P$  belső fixpont az  $(1, 1, 1)$  pont.

A tétel alapján a paraméterek száma a rendszerben 12-ről 9-re csökken, amit a  $b_i$  értékek kiküszöbölésére használunk:

$$(3.4) \quad F_i(x) = x_i \cdot (A(u - x))_i$$

ahol  $u = \operatorname{col}[1, 1, \dots, 1]$ . Ezek szerint  $F$  teljesen meghatározott az  $A$  mátrixszal és  $DF_P = (-P_j \cdot a_{ij}) = -A$ .



3.6. TÉTEL. A fenti 8 nulla izoklína osztályban  $\det(DF_p) < 0$ .

A két tétel alapján lehetővé válik, hogy egy adott nulla izoklína konfigurációhoz definiáljunk egy rendszer családot.

3.5. Definíció. Legyen  $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i(A(u-x))_i$  és  $T = \text{diag}[\tau_{11}, \tau_{22}, \tau_{33}]$  egy háromdimenziós diagonális mátrix és tekintsük az  $F_i^T(x) = x_i \cdot (T \cdot A \cdot (u-x))_i$  vektormezőt. Ezzel Lotka-Volterra rendszerek egy  $F(F)$  családját definiálhatjuk a következő módon:  $F(F) = \{F^T \mid \tau_{ii} > 0, i = 1, 2, 3\}$ . Ennek a családnak egy reprezentánsa  $F$ . Noha  $F(F)$  egy háromparaméteres család, a  $\tau_{ii}$  diagonális értékek változtatásával mint egyparaméterest tanulmányozhatjuk.

3.7. TÉTEL. Minden  $F$ -hez tartozik egy pozitív  $T$  diagonális mátrix, amelyre  $F^T \mid \Sigma$  topológiailag ekvivalens egy két dimenziós Lotka-Volterra rendszerrel.

3.4. KÖVETKEZMÉNY. Általános  $F$  esetén létezik  $CLV(3)$ -ban olyan rendszer, amelynek nulla izoklínei ugyanazok, mint  $F$ -nek, de nincs periodikus pályája.

Ezek alapján mind a 8 osztályban kiválasztható olyan reprezentáns, amelynek nincs periodikus pályája. Célunk olyan feltételek meghatározása, melyek alapján eldönthető, mely családokban keletkezhet Hopf bifurkáció. Ehhez a rendszer  $A$  mátrixa kétdimenziós főminorjainak determinánsait fogjuk használni:

$$M_{jk} = \det(A_{jk}) = \begin{vmatrix} a_{jj} & a_{jk} \\ a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix}, j \neq k.$$

Az  $A_{jk}$  minomátrix a  $(x_j, x_k)$  koordinátasíkra leszűkített rendszer viselkedését határozza meg, és a leszűkített rendszerről belátható, hogy szintén kétdimenziós Lotka-Volterra rendszer. A következő két tételt M. L. Zeeman általánosabban  $n$  dimenzióra mondja ki, de nekünk most  $n = 3$  is elegendő.

3.8. TÉTEL. Legyen  $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i \cdot (A(u-x))_i, i = 1, 2, 3$ , amelyre  $\det A > 0$ . Ha  $\sum_{j < k, k=2}^3 M_{jk} < 0$ , akkor  $P$ -nek létezik egy legalább kétdimenziós instabilis sokasága, azaz  $P$  repellor  $\Sigma$ -ban.

3.5. KÖVETKEZMÉNY. Ha minden  $R_i$  típusú fixpont attraktor, akkor  $F$ -nek nincs más attraktora.

3.6. KÖVETKEZMÉNY. Legyen  $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i \cdot (A(u-x))_i, i = 1, 2, 3$ , amelyre  $\det A > 0$ . Ha  $M_{jk} < 0$ , minden  $j \neq k$ -ra, akkor az  $F(F)$  családnak  $P$ -ben nincs Hopf bifurkációja.

Arra tehát feltételt találtunk, hogy mikor nem fordul elő Hopf bifurkáció a rendszerben. A következő tétel arra ad elégséges feltételt, hogy mikor lesz biztosan Hopf bifurkáció egy családban.

3.9. TÉTEL. Legyen  $\dot{x}_i = F_i(x) = x_i \cdot (A(u - x))_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , amelyre  $\det A > 0$ . Ha az  $M_{jk}$  értékek között különböző előjelűek vannak, akkor az  $F(F)$  családban biztosan fellép Hopf bifurkáció.

#### 4. Nem szimmetrikus modellek

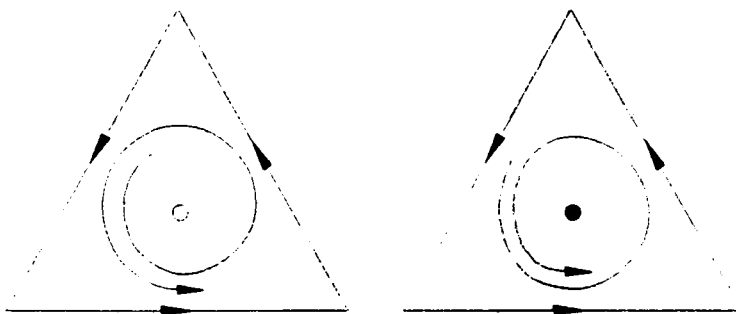
Alkalmazzuk először az előzőekben ismertetett módszert az eredeti May-Leonard modellre.

Ez az eljárás illusztrálásán túl, más tanulságokkal is jár. Miután feltevéseink szerint  $0 < \alpha < 1$  és  $\beta > 1$  így a  $Q_i$  típusú síkbeli fixpontok nem esnek a  $R_+^n$ -ba, vagyis a  $Q_{ii}$  mennyiségeknek nincs értelmük. Kiszámolva az  $R_{ij}$  értékeket:

$$R_{12} = \operatorname{sgn}(\beta - 1) = 1, \quad R_{21} = \operatorname{sgn}(\alpha - 1) = -1, \quad R_{31} = \operatorname{sgn}(\beta - 1) = 1$$

$$R_{13} = \operatorname{sgn}(\alpha - 1) = -1, \quad R_{23} = \operatorname{sgn}(\beta - 1) = 1, \quad R_{32} = \operatorname{sgn}(\alpha - 1) = -1$$

Ezek alapján a rendszer besorolható egy stabilis nulla izoklína osztályba és a 4. ábrán látható két fáziskép képzelhető el hozzá (az egyszerűség kedvéért csak az egység szimplexten ábrázolva, a tényleges fáziskép homeomorf ezzel):



4. ábra A szimmetrikus rendszer lehetséges fázisportréi

Vizsgáljuk meg ezután, milyen feltétel adódik Hopf bifurkáció keletkezésére. Ehhez hozzuk  $x_i = x_i(\tilde{A}(u - x))_i$  alakra egyenleteinket [2]. Alkalmazzuk az  $x \mapsto [\operatorname{diag} P]x$  lineáris koordináta transzformációt, ahol  $\operatorname{diag} P = [P_{ii}]$  diagonális mátrix és  $P_{ii} = P_i$ . Mivel  $AP = b$  írhatjuk:  $F_i(x) = x_i(b_i - (Ax)_i) = x_i(A(p - x))_i$ . Ebből a fenti transzformációval kapjuk:

$$\begin{aligned} [(\operatorname{diag} P)^{-1} F(\operatorname{diag} P)]_i(x) &= \frac{1}{P_i} (P_i x_i (A(\operatorname{diag} P - \operatorname{diag} P x))_i) \\ &= x_i(\tilde{A}(u - x)) \end{aligned}$$

ahol  $\tilde{A} = A \operatorname{diag} P$ . Esetünkben:  $\operatorname{diag} P = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} I$ , ahol  $I$  az egységmátrix. A transzformációval az alábbi rendszert kapjuk:

$$x_i = x_i(\tilde{A}(1 - x))_i, \quad \text{ahol } \tilde{A} = \frac{1}{\alpha + \beta + 1} A$$

és mivel  $\det A > 0$  így  $\det \tilde{A} > 0$ . Kiszámolva a minorokat:

$$M_{12} = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta + 1}, \quad M_{13} = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta + 1}, \quad M_{23} = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha + \beta + 1}$$

Látszik, hogy az elégséges feltétel Hopf-bifurkáció keletkezésére nem teljesül erre a rendszerre. Annyit tudunk mondani az osztályozás alapján, hogy biztosan nem lép föl Hopf bifurkáció, ha minden  $M_{jk} < 0$ , azaz ha

$$1 - \alpha\beta < 0 \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{\alpha} < \beta.$$

Vizsgáljuk meg ezek után a nem szimmetrikus alak legegyszerűbb esetét, ahol

$$(4.1) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ \beta & 1 & \alpha \\ \alpha & \beta & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és } 0 < \alpha < 1, \beta > 1, \gamma > 1.$$

A fenti kikötéseket  $\alpha, \beta, \gamma$ -ra mint a May-Leonard rendszer kikötéseinek megfelelőit írtuk elő. Cikkünk végén a teljesség kedvéért megvizsgáljuk a  $0 < \gamma < 1$  esetét is.

A modell egyensúlyi helyzetei a következők:

- 1) az  $O : (0, 0, 0)$
- 2) az  $R_1 : (1, 0, 0)$ ,  $R_2 : (0, 1, 0)$ ,  $R_3 : (0, 0, 1)$  tengelybeli fixpontok
- 3) a  $Q_1 : \frac{1}{\alpha\beta - 1}(0, \alpha - 1, \beta - 1)$ ,  $Q_2 : \frac{1}{\alpha\gamma - 1}(\gamma - 1, 0, \alpha - 1)$ ,  $Q_3 : \frac{1}{\alpha\beta - 1}(\alpha - 1, \beta - 1, 0)$  síkbeli fixpontok.
- 4) a  $P : \frac{1}{\tilde{A}}(\alpha^2 - \alpha\beta - \alpha + 1 + \gamma\beta - \gamma, 1 - \alpha - \gamma\alpha - \beta + \alpha^2 + \gamma\beta, 1 - \alpha\beta + \alpha^2 - \alpha - \beta + \beta^2) = \frac{1}{\tilde{A}}(a, b, c)$ , ahol  $\det A = 1 - 2\alpha\beta - \gamma\alpha + \alpha^3 > 0$ .

Megvizsgálva a  $Q$  síkbeli fixpontokat, ismét megkapjuk, hogy az  $\alpha, \beta, \gamma$ -ra vonatkozó feltételeink mellett azok nem esnek a pozitív kúpba, így a  $Q_{ii}$  értékek érdektelenek. Kiszámolva az  $R_{ij}$  mennyiségeket:

$$\begin{aligned} R_{12} &= 1, & R_{21} &= -1, & R_{31} &= 1 \\ R_{13} &= -1, & R_{23} &= 1, & R_{32} &= -1. \end{aligned}$$

Vagyis a rendszer ugyanabba a stabilis nulla izoklína osztályba esik, mint a szimmetrikus esetben, vagyis a  $\Sigma$  határán viselkedése változatlan. Írjuk át rendszerünket az  $\tilde{A} = A \operatorname{diag} P$  transzformáció segítségével:

$$\tilde{A} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a & \alpha b & \gamma c \\ \beta a & b & \alpha c \\ \alpha a & \beta b & c \end{bmatrix}$$

ahol  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ , hiszen  $P \in \text{Int} R_+^n$ .

Kiszámolva a főminorokat:

$$M_{12} = ab(1 - \alpha\beta), \quad M_{13} = ac(1 - \alpha\gamma), \quad M_{23} = bc(1 - \alpha\beta).$$

Biztosan nincs Hopf bifurkáció, ha  $M_{ik} < 0$ , tehát ha  $\alpha\beta > 1$  és  $\alpha\gamma > 1$ , azaz  $\beta > \frac{1}{\alpha}$  és  $\gamma > \frac{1}{\alpha}$ .

Fellép Hopf-bifurkáció, ha  $\alpha\beta > 1$  és  $\alpha\gamma < 1$  vagy  $\alpha\beta < 1$  és  $\alpha\gamma > 1$ . Másképpen:

$$\frac{1}{\alpha} < \beta \text{ és } \gamma < \frac{1}{\alpha} \text{ vagy } \beta < \frac{1}{\alpha} \text{ és } \frac{1}{\alpha} < \gamma.$$

A hagyományos sajátértékeken alapuló módszert használva pontosan ki is számolhatjuk milyen paraméterekre léphet föl a Hopf-bifurkáció. A linearizált rendszer a következő alakú lesz:

$$(4.2) \quad \dot{y} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A - 2a - \alpha \cdot b - \gamma \cdot c & -\alpha \cdot a & -\gamma \cdot a \\ -\beta \cdot b & A - \beta \cdot a - 2b - \alpha \cdot c & -\alpha \cdot b \\ -\alpha \cdot c & -\beta \cdot b & A - \alpha \cdot a - \beta \cdot b - 2c \end{bmatrix} \cdot y$$

ahol  $\det A > 0$  és  $a, b, c > 0$ , mivel a  $P$  pont a pozitív kúpba esik. Jelöljük  $\tilde{A}$ -mal a linearizált rendszer mátrixát. Kiszámolva  $\tilde{A}$  sajátértékeit a következő értékeket kapjuk:

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + 2\alpha\beta + \alpha\gamma - \alpha^3 - \beta^2\gamma = -\det A \\ \lambda_{2,3} &= U \pm \frac{1}{2}\sqrt{V} \end{aligned}$$

Itt  $U$  és  $V$  az alábbi polinomokat jelöli:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} U &= \frac{1}{2}(\alpha^3 + \gamma - 2\beta\gamma + \beta^2\gamma + 2\beta - \beta^2 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 2) \\ V &= (3\alpha^6 + \gamma^2 - 4\alpha^3\gamma^2 - 4\gamma\alpha^4 + \\ &\quad + 4\alpha^3\gamma^2\beta - 2\gamma\alpha^2\beta^2 - 8\gamma^2\alpha\beta^2 + 4\alpha\beta + \\ &\quad + 2\gamma\alpha - 4\gamma\beta - 3\alpha^2 - 4\gamma^2\alpha + 2\gamma\beta^2 + 4\gamma^2\alpha^2 + \\ &\quad + 6\alpha^3 + 6\gamma\beta^2 - 16\alpha^2\beta^3\gamma - 2\gamma\alpha^2 - \\ &\quad - 8\alpha^4\beta + 4\alpha\beta^3 + \beta^4 - 20\gamma\alpha^2\beta + 10\gamma\alpha\beta^2 + \\ &\quad + 4\alpha\beta^4\gamma - 16\alpha^4\beta\gamma + 12\alpha^3\beta\gamma + \\ &\quad + 22\alpha^3\beta^2\gamma + 8\alpha^5\beta - 8\alpha^4\beta^2 + 4\alpha^3\beta^3 - 4\alpha\beta^4 - \\ &\quad - 2\alpha^3\beta^2 - 8\gamma\beta^3 + 6\gamma\alpha^3 - 9\alpha^4 + \\ &\quad + 12\alpha^3\beta - 2\alpha^2\beta^2 - 4\beta\alpha^2 - 6\alpha\beta^2 - 2\gamma^2\beta^2 - \\ &\quad - 3\gamma^2\beta^4 + 4\gamma^2\beta^3 + 4\alpha\gamma\beta + 4\gamma^2\beta\alpha^2 - \\ &\quad - 8\gamma^2\beta^2\alpha^2 + 8\gamma^2\beta^3\alpha + 4\gamma^2\beta\alpha + 4\alpha^2\beta^3) \end{aligned}$$

Sajnos az Andronov-Hopf tétel feltételeinek vizsgálata  $U$  és  $V$  bonyolultsága miatt igen nehézkes lenne, ezt mi most nem végezzük el. Egy szükséges feltétel azonban viszonylag egyszerűen adódik, amely megad egy kétdimenziós felületet ahol felléphet Hopf bifurkáció.

4.1. TÉTEL. A (4.1) mátrixszal képezett rendszerben csak akkor léphet fel Hopf bifurkáció, ha a

$$(4.6) \quad \gamma = 1 - \frac{(\alpha - 1)^3}{(\beta - 1)^2}$$

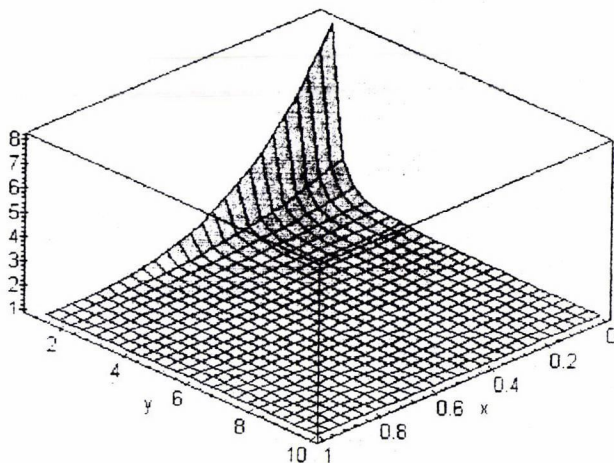
összefüggés teljesül.

*Bizonyítás.* Tegyük fel elsőnek, hogy  $V < 0$ . Ekkor  $\lambda_{2,3}$  komplex szám és az Andronov-Hopf tétel szerint csak  $\operatorname{Re} \lambda_{2,3} = U = 0$  teljesülése esetén keletkezhet Hopf bifurkáció, ennek pedig (4.6) a feltétele.

A  $V \geq 0$  eset érdektelen, hiszen itt csak valós gyökök vannak, így nem léphet fel Hopf bifurkáció.

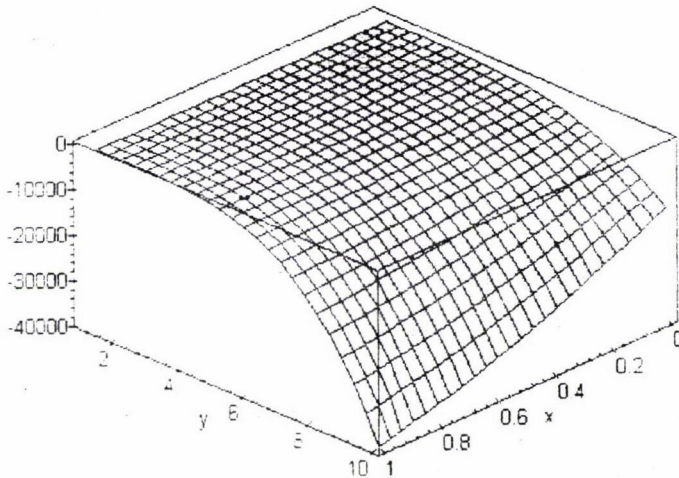
Megvizsgálva  $\lambda_1$ -et az is látszik, hogy  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ , így ez a feltétele is teljesül az Andronov-Hopf tételnek.

Ábrázolva a (4.6) egyenleten keresztül értelmezett felületet látható, hogy az összefüggésnek ténylegesen is van értelme, mivel  $\alpha$  és  $\beta$  vizsgált értékeire olyan  $\gamma$  értékek adódnak, melyek megfelelnek a (4.1) feltételeknek



5. ábra A (4.6) összefüggéssel definiált felület grafikonja az  $0 < \alpha < 1$  és  $1 < \beta < 10$  intervallumon. Az ábrán az  $x$  tengely  $\alpha$ -nak, az  $y$  tengely  $\beta$ -nak felel meg.

Vegyük szemügyre a hiányzó feltétel kulcsát jelentő  $V$  polinomot. Ábrázolva  $V$  grafikonját a paraméterek vizsgált intervallumán látszik, hogy ezen a tartományon  $V < 0$ . Ez alapján kimondható a következő:



6. ábra A  $V$  polinom grafikonja az  $0 < \alpha < 1$  és  $1 < \beta < 10$  intervallumon. Az ábrán az  $x$  tengely  $\alpha$ -nak, az  $y$  tengely  $\beta$ -nak felel meg.

4.1. SEJTÉS. A  $\gamma = 1 - \frac{(\alpha - 1)^3}{(\beta - 1)^2}$  feltétel szükséges és elégséges feltétele a Hopf bifurkáció keletkezésének.

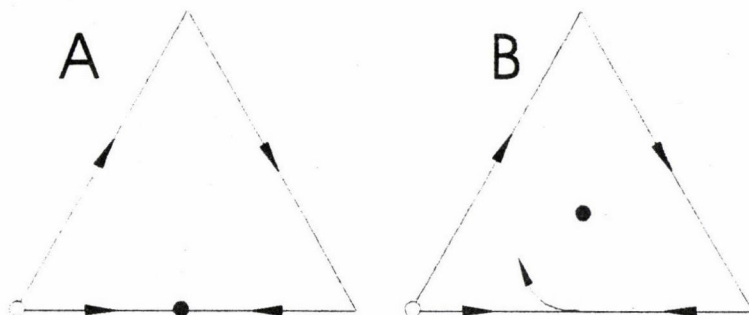
Vizsgáljuk most meg a  $\gamma < 1$  esetet. Az előzőleg ismertetett esethez képest alapvető különbséget jelent, hogy ebben a rendszerben lesz síkbeli fixpont, mivel  $Q_2 : \frac{1}{\alpha\gamma - 1}(\gamma - 1, 0, \alpha - 1)$  koordinátái a fenti kikötések alapján pozitívak, azaz a fixpont a pozitív kúpba esik. Meghatározva a rendszer nulla izoklína konfigurációját az alábbi értékek adódnak:

$$\begin{aligned} R_{12} &= 1, & R_{21} &= -1, & R_{31} &= -1 \\ R_{13} &= -1, & R_{23} &= 1, & R_{32} &= -1, \end{aligned}$$

illetve

$$(4.7) \quad Q_{22} = \operatorname{sgn} \left( \frac{\beta(\gamma - 1) + \alpha(\alpha - 1)}{\alpha\gamma - 1} - 1 \right).$$

Miután  $Q_1, Q_3$  fixpontok most sem esnek a pozitív kúpba, így  $Q_{11}, Q_{22}$  értékek nincsenek értelmezve. A rendszer besorolását  $Q_{22}$  értéke dönti el. Megvizsgálva a (4.7) értékét azt kapjuk, hogy  $Q_{22} = 1$  ha  $\beta(\gamma - 1) + \alpha(\alpha - 1) - (\alpha\gamma - 1) < 0$ , illetve  $Q_{22} = -1$  ha



7. ábra A nem szimmetrikus rendszer lehetséges fázisportréi  $\gamma < 1$  esetén

$\beta(\gamma - 1) + \alpha(\alpha - 1) - (\alpha\gamma - 1) > 0$ . Ebből rendezés után adódik, hogy a (4.1) mátrixszal adódó rendszerre a következő fázisportrék valamelyike jellemző:

Az A eset feltétele, hogy teljesüljön a  $0 < \gamma < \frac{\beta + \alpha - \alpha^2 - 1}{\beta - \alpha}$  egyenlőtlenség. Látszik, hogy ekkor olyan fázisportrét kapunk, amelyben nem lehetséges Hopf bifurkáció, sőt nincs is belső fixpont. Ebben az esetben tehát a rendszer hosszú távú viselkedése teljesen meghatározott.

A B eset akkor lép fel, ha a  $\frac{\beta + \alpha - \alpha^2 - 1}{\beta - \alpha} < \gamma < 1$  összefüggés igaz. Ebben az esetben a rendszer dinamikáját csak a határokon ismerjük, mivel a tartományon belül megjelenhetnek zárt pályák. A Hopf bifurkáció fellépésének itt is szükséges feltétele a 4.1 tétel, illetve érvényes a megfogalmazott sejtés is. Természetesen, mint az várható is volt, egyik eset sem emlékeztet a szimmetrikus rendszer nem lineáris viselkedésére.

#### IRODALOM

- [1] FARKAS, M., *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [2] HIRSCH, M.W., SMALE, S., *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [3] HOFBAUER, J., SO, J.W.-H., „Multiple limit cycles for three dimensional Lotka-Volterra equations”, *Applied Mathematic Letters* 7 (1994), 65–70.
- [4] MAY, R.M., „Nonlinear aspects of competition between three species”, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 29 (1975), 243–253.
- [5] MURRAY, J.D., *Mathematical Biology*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [6] SCHUSTER, P., SIGMUND, K., WOLFF, R., „On  $\omega$ -limits for competition between three species”, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 37 (1979), 49–54.
- [7] ZEEMAN, M.L., „Hopf bifurcations in Lotka-Volterra systems”, *Dynamics and Stability of Systems* 8 (1993), 189–217.

(Beérkezett: 1997. május 9.)

SZENTKUTI ZSOLT  
BME MATEMATIKAI INTÉZET  
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TANSZÉK  
1111 BUDAPEST XI., MŰEGYETEM RKP. 3.

## PERIODIC SOLUTIONS OF NON-SYMMETRIC MAY-LEONARD SYSTEMS

Zs. SZENTKUTI

There are well known methods for the description of long-term behaviour of a system (the Routh-Hurwitz criteria or the Poincaré-Andronov theorem for example), we encounter difficulties because of the algebraic problems - even in case of small dimension - if we haven't got some assumptions for the symmetricity of the system. In this paper we study a more general, non-symmetric form of the May-Leonard system. Instead of the Routh-Hurwitz criteria we apply a classification by M.L. Zeeman for the observation of long-term behaviour of a system. This classification is founded upon the geometric analysis of the nullclines of a system and define a combinatorial equivalence relation on the space in terms of simple inequalities on the parameters. We give a simple necessary condition on the parameters in this non-symmetric May-Leonard system to predict the occurrence of a Hopf-bifurcation and consequently, of isolated periodic orbits.



## ÚJ KORLÁTOK A SPECIÁLIS "CONSECUTIVE K-OUT-OF-R-FROM-N: F" RENDSZER MEGBÍZHATÓSÁGÁRA\*

A. HABIB<sup>†</sup> ÉS T. SZÁNTAI

Budapest

A dolgozat célja az, hogy kevesebb számolással élesebb korlátokat adjon a címben leírt speciális rendszer megbízhatóságára, mint az korábban az irodalomban ismert volt. Ezek az új korlátok a Boole-Bonferroni típusú korlátok családjába tartoznak. Azt is megmutatjuk a dolgozatban, hogy a Hunter és Worsley által javasolt korlát is jó eredménnyel alkalmazható a megbízhatósági rendszerek megbízhatóságának a korlátozására. A dolgozat utolsó részében numerikus eredményeket adunk korábbi dolgozatokban publikált teszt feladatokra, illetve azoknál lényegesen nehezebb problémákra vonatkozó numerikus eredményeket is közlünk. Az elkészített Fortran kódokat kérésre az olvasó rendelkezésére bocsájtjuk.

### 1. Bevezetés

A „consecutive-k-out-of-r-from-n:F” megbízhatósági rendszert Tong [35] vezette be. Az utolsó néhány évben több dolgozat is foglalkozott ilyen típusú megbízhatósági rendszerekkel. Minthogy a „consecutive-k-out-of-r-from-n:F” rendszer speciális esetként magába foglalja mind a „consecutive-k-out-of-n:F” rendszert ( $k = r$ ), mind a „k-out-of-n:F” rendszert ( $r = n$ ), az ebben a témakörben megjelent dolgozatok száma még nagyobb. Az általános rendszert leginkább görög szerzők vizsgálták, mint például Kounias, Koutras, Sfakianakis és Papastavridis. Az ilyen témájú fontosabb publikációik a következők: [15], [16], [17], [23], [24], [21], [31], [30] és [32]. A  $k = r$  speciális esetre vonatkozó korlátokat a korábbiak mellett Derman, Fu, Chrysaphinou és sokan mások publikáltak. Az ilyen típusú dolgozatok egy korántsem teljes listája a következő: [3], [4], [6], [7], [8], [9] és [22]. Végül Chao, Fu és Koutras összefoglaló jellegű, kiváló dolgozatára hívjuk még fel az olvasó figyelmét: [2].

Ebben a dolgozatban új alsó és felső korlátokat adunk meg a „consecutive-k-out-of-r-from-n: F” rendszer hibázási valószínűségére, illetve megbízhatóságára. Ezek a korlátok a Sfakianakis, Kounias és Hillaris [32] által közölt korlátok általánosításának tekinthetők, mivel ugyanúgy Boole-Bonferroni típusúak, mint azok. Míg azonban Sfakianakis, Kounias és Hillaris csak az első három binomiális momentumon alapuló Boole-Bonferroni korlátokat tudták számítani, addig ebben a dolgozatban algoritmust adunk meg a negyedik binomiális momentum számolására is, és megmutatjuk, hogy az ennek végrehajtásához szükséges többlet munka megtérül azáltal, hogy a használatával számolható Boole-Bonferroni korlátok lényegesen élesebbek lesznek, mint a korábbi korlátok voltak. Megjegyezzük, hogy

\*A dolgozat megírásához vezető munkát részben az OTKA T014102 számú pályázata támogatta.

<sup>†</sup>Az MTA aspiránsa, korábbi munkahelye Dept. of Math.; Faculty of Science; Menoufia University, Shibeen El-Kom; EGYPT .

Sfakianakis, Kounias és Hillaris a harmadik binomiális momentum számolására szolgáló algoritmusukban egy esetszétválasztásról megfeledeztek, melyre a jelen dolgozat szerzői hívták fel a figyelmet a [11] helyreigazításban. További eredményként javasoljuk a dolgozatban a Hunter–Worsley-féle korlát [13], [36] megbízhatósági rendszerekre történő alkalmazását. Ez a korlát csupán az első binomiális momentumot, valamint a második binomiális momentum számolásához szükséges valószínűség értékeket használja, így igen gyorsan számolható és meglepően élesnek bizonyul. Sajnos ezen a módon a rendszer hibázási valószínűségére csak felső, a rendszer megbízhatóságára pedig csak alsó korlátot lehet számítani. További érdekes, igen gyorsan számolható korlátokat adott meg Jun Cai [14] is, amelyre számítógépes programot készítettünk, így a numerikus teszt feladatok eredményeit az ő általa javasolt korlátokkal is össze tudtuk hasonlítani. Végül a gondosan megtervezett és elkészített számítógépes programunk lehetőséget adott arra is, hogy az eddigieknél lényegesen nagyobb méretű feladatokra is közeledjünk numerikus eredményeket.

### Jelölések

$n$	a rendszer komponenseinek a száma
$r$	a rendszer $n$ komponenséből kiválasztott egymásutáni komponensek (úgynevezett ablak) száma (mérete) ( $r \leq n$ )
$k$	az $r$ egymásutáni komponens közötti hibásak minimális száma, amely már a rendszer hibázását okozza, $k \leq r$
$p, q$	annak a valószínűsége, hogy egy komponens jó, vagy hibás ( $p + q = 1$ )
$R(p; k, r, n)$	a "consecutive $k$ -out-of- $r$ -from- $n$ :F" rendszer megbízhatósága
$F(p; k, r, n)$	a "consecutive $k$ -out-of- $r$ -from- $n$ :F" rendszer hibázási valószínűsége ( $R(p; k, r, n) = 1 - F(p; k, r, n)$ )
$N$	$n - r + 1$
$A_i$	az az esemény, hogy az $i, i + 1, \dots, i + r - 1$ komponensek közül legalább $k$ komponens hibás, $i = 1, \dots, N$
$\mu$	azon $A_1, \dots, A_N$ események számát definiáló valószínűségi változó, amelyek bekövetkeznek
$S_1, S_2, S_3, S_4$	a $\mu$ valószínűségi változó binomiális momentumai
$S_1$	$\sum_i \Pr(A_i), 1 \leq i \leq N$ -re
$S_2$	$\sum_{i,j} \Pr(A_i A_j), 1 \leq i < j \leq N$ -re
$S_3$	$\sum_{i,j,\nu} \Pr(A_i A_j A_\nu), 1 \leq i < j < \nu \leq N$
-re	
$S_4$	$\sum_{i,j,\nu,\rho} \Pr(A_i A_j A_\nu A_\rho), 1 \leq i < j < \nu < \rho \leq N$ -re
$LB_j$	az első $j$ ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) binomiális momentumon alapuló legjobb Boole-Bonferroni korlátokból adódó alsó korlátok $F(p; k, r, n)$ -re
$UB_j$	az első $j$ ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) binomiális momentumon alapuló legjobb Boole-Bonferroni korlátokból adódó felső korlátok $F(p; k, r, n)$ -re
$UHW$	a Hunter és Worsley módszere szerint számított felső korlát $F(p; k, r, n)$ -re
$\binom{m}{j}$	binomiális együttható
$[x]$	$x$ alsó egész része

## 2. A Boole-Bonferroni-típusú és a Hunter-Worsley korlát számítási eljárások

A Boole-Bonferroni-típusú korlátokat először Sfakianakis, Kounias és Hillaris [32] alkalmazta megbízhatóságok becslésére. Ebben a dolgozatban megadjuk az ilyen típusú korlátok egy egységes származtatási módját. Ezt az általános eljárást Prékopa, Boros és Prékopa [25], [1] dolgozták ki. Az eljárás a binomiális momentumok definícióján és az ezekre a momentumokra felírt lineáris programozási feladat megoldásán alapul.

Jelölje  $\mu$  azon  $A_1, \dots, A_N$  események számát, amelyek egy véletlen kísérlet alkalmával bekövetkeznek. Ekkor  $\mu$  nyilvánvalóan egy olyan valószínűségi változó, amely a  $0, 1, \dots, N$  értékeket veszi fel. Jól ismert, hogy ennek a valószínűségi változónak a binomiális momentumai  $S_i$ -vel egyenlők, azaz

$$(1) \quad S_i = E \left[ \binom{\mu}{i} \right], \quad i = 1, \dots, N.$$

Ennek a ténynek egy meglepően egyszerű bizonyítása olvasható például Takács [34] dolgozatában.

Másrészt, ha  $p_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  jelöli a  $\mu$  valószínűségi változó eloszlását, azaz

$$(2) \quad p_i = \Pr(\mu = i), \quad i = 0, 1, \dots, N,$$

akkor a várható érték definíciójából és a (1), (2) összefüggésekből a következő lineáris egyenletrendszert származtathatjuk:

$$(3) \quad S_i = \sum_{j=1}^N \binom{j}{i} p_j, \quad i = 1, \dots, N.$$

Ugyanez a fordított irányban, azaz a  $p_j$  valószínűségek kifejezése az  $S_i$  binomiális momentumokkal:

$$(4) \quad p_j = \sum_{i=1}^N (-1)^{i-j} \binom{i}{j} S_i, \quad j = 1, \dots, N.$$

A (3) egyenletrendszer együtthatómátrixának az inverze megtalálható pl. Riordan [29] könyvében.

Ugyancsak könnyen belátható, hogy bármely  $p_0, p_1, \dots, p_N$  ( $p_0 \geq 0, \dots, p_N \geq 0$ ;  $p_0 + p_1 + \dots + p_N = 1$ ) valószínűségeloszlás reprezentálható úgy, mint egy tetszőleges valószínűségi mező  $A_1, \dots, A_N$  eseményei közül bekövetkező események számának a valószínűségeloszlása. Ekkor, ha csak az  $S_1, \dots, S_M$  binomiális momentumok ismertek (számíthatók), ahol  $M < N$  és a  $p_1, \dots, p_N$  valószínűségeket ismeretlen változóknak tekintjük, akkor a következő két lineáris programozási feladat

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & \min_{\text{feltéve, hogy}} \{p_1 + p_2 + \dots + p_M + \dots + p_N\} \\
 & p_1 + \binom{2}{1} p_2 + \dots + \binom{M}{1} p_M + \dots + \binom{N}{1} p_N = S_1 \\
 & \phantom{p_1 +} p_2 + \dots + \binom{M}{2} p_M + \dots + \binom{N}{2} p_N = S_2 \\
 & \phantom{p_1 +} \ddots \phantom{p_2 +} \phantom{\dots +} \phantom{\binom{M}{2} p_M +} \phantom{\dots +} \phantom{\binom{N}{2} p_N} \vdots \\
 & \phantom{p_1 +} \phantom{p_2 +} \phantom{\dots +} p_M + \dots + \binom{N}{M} p_N = S_M \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_M \geq 0, \dots, p_N \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (6) \quad & \max_{\text{feltéve, hogy}} \{p_1 + p_2 + \dots + p_M + \dots + p_N\} \\
 & p_1 + \binom{2}{1} p_2 + \dots + \binom{M}{1} p_M + \dots + \binom{N}{1} p_N = S_1 \\
 & \phantom{p_1 +} p_2 + \dots + \binom{M}{2} p_M + \dots + \binom{N}{2} p_N = S_2 \\
 & \phantom{p_1 +} \ddots \phantom{p_2 +} \phantom{\dots +} \phantom{\binom{M}{2} p_M +} \phantom{\dots +} \phantom{\binom{N}{2} p_N} \vdots \\
 & \phantom{p_1 +} \phantom{p_2 +} \phantom{\dots +} p_M + \dots + \binom{N}{M} p_N = S_M \\
 & p_1 \geq 0, p_2 \geq 0, \dots, p_M \geq 0, \dots, p_N \geq 0
 \end{aligned}$$

megoldása a

$$(7) \quad \Pr(\mu \geq 1) = \Pr(A_1 + \dots + A_N) = F(p; k, r, n)$$

valószínűségre alsó, illetve felső korlátot fog eredményezni. Ezek a korlátok a lehető legjobb olyan korlátok, amelyek az  $S_1, \dots, S_M$  lineáris kifejezéseként állnak elő, és ezeket nevezzük Boole-Bonferroni korlátoknak.

A következőkben kis  $M$  értékekre megadjuk a fenti lineáris programozási feladatok ismert explicit megoldásait.

**A. Alsó korlát, ha csak  $S_1$  és  $S_2$  ismert.**

Legyen

$$i = \left\lfloor \frac{2S_2}{S_1} \right\rfloor,$$

akkor a (7) valószínűségre éles alsó korlát az alábbi:

$$(8) \quad F(p; k, r, n) \geq \frac{2}{i+1} S_1 - \frac{2}{i(i+1)} S_2.$$

**B. Felső korlát, ha csak  $S_1$  és  $S_2$  ismert.**

A (7) valószínűségre éles felső korlát:

$$(9) \quad F(p; k, r, n) \leq S_1 - \frac{2}{N} S_2.$$

**C. Alsó korlát, ha csak  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  ismert.**

Legyen

$$i = 1 + \left\lfloor \frac{-6S_3 + 2(N-2)S_2}{-2S_2 + (N-1)S_1} \right\rfloor$$

akkor a (7) valószínűségre éles alsó korlát az alábbi:

$$(10) \quad F(p; k, r, n) \geq \frac{i+2N-1}{(i+1)N} S_1 - \frac{2(2i+N-2)}{i(i+1)N} S_2 + \frac{6}{i(i+1)N} S_3.$$

**D. Felső korlát, ha csak  $S_1$ ,  $S_2$  és  $S_3$  ismert.**

Legyen

$$i = 2 + \left\lfloor \frac{3S_3}{S_2} \right\rfloor$$

akkor a (7) valószínűségre éles felső korlát az alábbi:

$$(11) \quad F(p; k, r, n) \leq S_1 - \frac{2(2i-1)}{i(i+1)} S_2 + \frac{6}{i(i+1)} S_3.$$

**E. Alsó korlát, ha csak  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  és  $S_4$  ismert.**

Sajnos ebben az esetben nem ismert az (5) lineáris programozási feladat optimális megoldására explicit képlet. Prékopa [26] megmutatta azonban, hogy egy duál típusú szimplex módszer hatékonyan oldja meg ekkor is az (5) lineáris programozási feladatot. Megjegyezzük, hogy a 4. fejezetben közölt numerikus eredményeket egy általános célú lineáris programozási kóddal nyertük, amellyel a lineáris programozási feladatok megoldási ideje még mindig elhanyagolható volt az  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  és  $S_4$  binomiális momentumok számítási idejéhez képest.

**F. Felső korlát, ha csak  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  és  $S_4$  ismert.**

Legyen

$$i = 1 + \left\lfloor \frac{-12S_4 + 3(N-4)S_3 + (N-2)S_2}{-3S_3 + (N-2)S_2} \right\rfloor$$

akkor a (7) valószínűségre éles felső korlát az alábbi:

$$(12) \quad F(p; k, r, n) \leq S_1 - \frac{2((i-1)(i-2) + (2i-1)N)}{i(i+1)N} S_2 + \frac{6(2i+N-4)}{i(i+1)N} S_3 - \frac{24}{i(i+1)N} S_4.$$

A (8) korlátot először Dawson és Sankoff [5] publikálta. Eltérő bizonyításokat adtak később a következők: Galambos [10], Kwerel [19], [20] és Prékopa [25]. A (10) és (11) korlátokat Kwerel [19], [20] és Boros és Prékopa [1] adták meg először. Végül a (12) korlát Prékopa [27] könyvében található meg.

### G. A Hunter és Worsley-féle felső korlát.

Az (5) és a (6) lineáris programozási feladatok helyett tekinthetnénk a velük analóg,  $2^N - 1$  változóra vonatkozó, és a jobboldalán az összes, az  $S_1, \dots, S_M$  binomiális momentumokba tömörített egyedi valószínűséget tartalmazó lineáris programozási feladatokat. Ebben az irányban az első eredményt Hailperin [12] érte el, valamint legújabban Prékopa és Vizvári [28] is közölt ilyen típusú eredményeket. Sajnos már nem túl nagy  $N$  értékek mellett is az így megoldandó lineáris programozási feladatok hatalmas méreteket öltenek. Hunter [13] és később tőle függetlenül Worsley [36] igen hatékony felső korlátot adott meg a (7) valószínűségekre úgy, hogy a számításához csupán  $S_1$ -re és az  $S_2$ -be foglalt bizonyos egyedi valószínűségekre van szükség. Ez a felső korlát igen gyorsan számolható és nem nehéz azt bebizonyítani, hogy minden esetben élesebb, mint a (9) felső korlát. Sőt, amint azt az utolsó fejezetben látni fogjuk, sok esetben még a (11) felső korlátnál is élesebb lehet.

A Hunter-Worsley felső korlát a következő:

$$(13) \quad F(p; k, r, n) \leq S_1 - \sum_{(i,j) \in T^*} \Pr(A_i A_j),$$

ahol  $T^*$  egy olyan  $N$  csúcsú, nem-irányított teljes gráf maximális feszítő fája, amely gráf úgy van definiálva, hogy az  $i$ -jelű csúcsát az  $A_i$  eseményhez (vagy a  $\Pr(A_i)$  valószínűséghez) rendeljük, az  $(i, j)$  jelű élét pedig a  $\Pr(A_i A_j)$  súllyal látjuk el. Megjegyezzük, hogy a maximális súlyú feszítő fa keresésére hatékony algoritmusok léteznek, az egyik ilyen például Kruskal [18] híres algoritmus.

### 3. Algoritmusok az $S_1, S_2, S_3, S_4$ binomiális momentumok számítására

Ebben a fejezetben megadjuk az összes olyan képletet, amely szükséges ahhoz, hogy az  $S_1, S_2, S_3$  és  $S_4$  binomiális momentumokba foglalt valószínűségeket ki tudjuk számolni. Megjegyezzük, hogy ezek közül csak az  $S_4$  számításához szükséges képletek jelentenek új eredményt, mivel az  $S_1, S_2, S_3$  binomiális momentumok számítási képleteit már Sfakianakis, Kounias & Hillaris is publikálták a [32] dolgozatukban. Amint azonban azt már korábban is említettük, az  $S_3$  számítására szolgáló képletükbe apró hiba csúszott, ezért, valamint a teljesség és a reprodukálhatóság kedvéért az alábbiakban az összes szükséges számítási képletet megadjuk.

A.  $1 \leq i \leq N$  -re.

$$(14) \quad \Pr \{A_i\} = \sum_{x=k}^r \binom{r}{k} q^x p^{r-x}.$$

B.  $1 \leq i < j \leq N$  -re.

$$(15) \quad \Pr \{A_i A_j\} = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \sum_{x_2=t_2}^{m_2} \sum_{x_3=t_3}^{m_3} \binom{r+i-j}{x_1} \cdot \binom{j-i}{x_2} \binom{j-i}{x_3} q^x p^{j+r-i-x},$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3, \\ t_1 &= \max(0, k - j + i), \quad m_1 = i + r - j, \\ t_2 &= \max(0, k - x_1), \quad m_2 = j - i, \\ t_3 &= \max(0, k - x_1), \quad m_3 = j - i, \end{aligned}$$

ha  $j - i \leq r - 1$ ,

$$(16) \quad \Pr \{A_i A_j\} = \Pr \{A_i\} \Pr \{A_j\},$$

ha  $j - i > r - 1$ .

C.  $1 \leq i < j < \nu \leq N$  -re.

$$(17) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu\} = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_5=t_5}^{m_5} \binom{i+r-\nu}{x_1} \binom{\nu-j}{x_2} \cdot \binom{j-i}{x_3} \binom{j-i}{x_4} \binom{\nu-j}{x_5} q^x p^{\nu+r-i-x},$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ t_1 &= \max(0, k - \nu + i), \quad m_1 = i + r - \nu, \\ t_2 &= \max(0, k - x_1 - j + i), \quad m_2 = \nu - j, \\ t_3 &= \max(0, k - x_1 - x_2), \quad m_3 = j - i, \\ t_4 &= \max(0, k - x_1 - x_2), \quad m_4 = j - i, \\ t_5 &= \max(0, k - x_1 - x_3), \quad m_5 = \nu - j, \end{aligned}$$

ha  $\nu - i \leq r - 1$ ,

$$(18) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu\} = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_5=t_5}^{m_5} \binom{\nu-i-r}{x_1} \binom{i-j+r}{x_2} \cdot \binom{j-\nu+r}{x_3} \binom{j-i}{x_4} \binom{\nu-j}{x_5} q^x p^{\nu+r-i-x},$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5, \\ t_1 &= \max(0, k + \nu - i - 2r), & m_1 &= \nu - i - r, \\ t_2 &= \max(0, k - x_1 - j + \nu - r), & m_2 &= i - j + r, \\ t_3 &= \max(0, k - x_1 - x_2), & m_3 &= j - \nu + r, \\ t_4 &= \max(0, k - x_2), & m_4 &= j - i, \\ t_5 &= \max(0, k - x_3), & m_5 &= \nu - j, \end{aligned}$$

$$\text{ha } \nu - i > r - 1; \quad j - i \leq r - 1, \nu - j \leq r - 1,$$

$$(19) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu\} = \Pr(A_i A_j) \Pr(A_\nu),$$

$$\text{ha } \nu - i > r - 1; \quad j - i \leq r - 1, \nu - j > r - 1,$$

$$(20) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j A_\nu),$$

$$\text{ha } \nu - i > r - 1; \quad j - i > r - 1, \nu - j \leq r - 1,$$

$$(21) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j) \Pr(A_\nu),$$

$$\text{ha } \nu - i > r - 1; \quad j - i > r - 1 \text{ és } \nu - j > r - 1.$$

D.  $1 \leq i < j < \nu < \rho \leq N$  -re.

$$(22) \quad \begin{aligned} \Pr\{A_i A_j A_\nu A_\rho\} &= \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_7=t_7}^{m_7} \binom{i+r-\rho}{x_1} \binom{\rho-\nu}{x_2} \binom{j-i}{x_3} \\ &\cdot \binom{\nu-j}{x_4} \binom{\nu-j}{x_5} \binom{j-i}{x_6} \binom{\rho-\nu}{x_7} q^x p^{\rho-i+r-x}, \end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7, \\ t_1 &= \max(0, k - \rho + i), & m_1 &= i + r - \rho, \\ t_2 &= \max(0, k - x_1 - \nu + i), & m_2 &= \rho - \nu, \\ t_3 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - \nu + j), & m_3 &= j - i, \\ t_4 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), & m_4 &= \nu - j, \\ t_5 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), & m_5 &= \nu - j, \\ t_6 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_4), & m_6 &= j - i, \\ t_7 &= \max(0, k - x_1 - x_3 - x_5), & m_7 &= \rho - \nu, \end{aligned}$$

$$\text{ha } \rho - i \leq r - 1,$$

$$(23) \quad \begin{aligned} \Pr\{A_i A_j A_\nu A_\rho\} &= \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_7=t_7}^{m_7} \binom{\rho-i-r}{x_1} \binom{i+r-\nu}{x_2} \binom{j+r-\rho}{x_3} \\ &\cdot \binom{\nu-j}{x_4} \binom{\nu-j}{x_5} \binom{j-i}{x_6} \binom{\rho-\nu}{x_7} q^x p^{\rho-i+r-x}, \end{aligned}$$



ahol

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7, \\
t_1 &= \max(0, k - i - 2r + \rho), & m_1 &= \rho - i - r, \\
t_2 &= \max(0, k - x_1 - \nu - r + \rho), & m_2 &= i + r - \nu, \\
t_3 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - \nu + j), & m_3 &= j + r - \rho, \\
t_4 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), & m_4 &= \nu - j, \\
t_5 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), & m_5 &= \nu - j, \\
t_6 &= \max(0, k - x_2 - x_4), & m_6 &= j - i, \\
t_7 &= \max(0, k - x_3 - x_5), & m_7 &= \rho - \nu,
\end{aligned}$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i \leq r - 1, \rho - j \leq r - 1,$$

$$(24) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j A_\nu A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j \leq r - 1; j - i > r - 1,$$

$$\begin{aligned}
(25) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu A_\rho\} &= \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_7=t_7}^{m_7} \binom{\rho - \nu}{x_1} \binom{\nu - i - r}{x_2} \binom{j + r - \rho}{x_3} \\
&\quad \cdot \binom{i + r - j}{x_4} \binom{\nu - j}{x_5} \binom{j - i}{x_6} \binom{\rho - \nu}{x_7} q^x p^{\rho - i + r - x},
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7, \\
t_1 &= \max(0, k - \nu - r + \rho), & m_1 &= \rho - \nu, \\
t_2 &= \max(0, k - x_1 - i - 2r + \rho), & m_2 &= \nu - i - r, \\
t_3 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - i - r + j), & m_3 &= j + r - \rho, \\
t_4 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), & m_4 &= i + r - j, \\
t_5 &= \max(0, k - x_1 - x_3), & m_5 &= \nu - j, \\
t_6 &= \max(0, k - x_4), & m_6 &= j - i, \\
t_7 &= \max(0, k - x_3 - x_5), & m_7 &= \rho - \nu,
\end{aligned}$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j \leq r - 1; j - i \leq r - 1,$$

$$\begin{aligned}
(26) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu A_\rho\} &= \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \dots \sum_{x_7=t_7}^{m_7} \binom{j - i}{x_1} \binom{i + r - \nu}{x_2} \binom{\rho - j - r}{x_3} \\
&\quad \cdot \binom{\nu - j}{x_4} \binom{\nu + r - \rho}{x_5} \binom{j - i}{x_6} \binom{\rho - \nu}{x_7} q^x p^{\rho - i + r - x},
\end{aligned}$$

ahol

$$\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7, \\
t_1 &= \max(0, k - i - r + j), & m_1 &= j - i, \\
t_2 &= \max(0, k - x_1 - \nu + j), & m_2 &= i + r - \nu, \\
t_3 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - \nu - r + \rho), & m_3 &= \rho - j - r, \\
t_4 &= \max(0, k - x_1 - x_2), & m_4 &= \nu - j, \\
t_5 &= \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), & m_5 &= \nu + r - \rho, \\
t_6 &= \max(0, k - x_2 - x_4), & m_6 &= j - i, \\
t_7 &= \max(0, k - x_5), & m_7 &= \rho - \nu,
\end{aligned}$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i \leq r - 1, \rho - j > r - 1; \rho - \nu \leq r - 1,$$

$$(27) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i A_j A_\nu) \Pr(A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i \leq r - 1, \rho - j > r - 1; \rho - \nu > r - 1,$$

$$(28) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \sum_{x_1=t_1}^{m_1} \cdots \sum_{x_7=t_7}^{m_7} \binom{j+r-\nu}{x_1} \binom{\nu-i-r}{x_2} \binom{\rho-j-r}{x_3} \\ \cdot \binom{i+r-j}{x_4} \binom{\nu+r-\rho}{x_5} \binom{j-i}{x_6} \binom{\rho-\nu}{x_7} q^x p^{\rho-i+r-x}$$

ahol

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7, \\ t_1 &= \max(0, k - \nu + j), & m_1 &= j + r - \nu, \\ t_2 &= \max(0, k - i - 2r + \nu), & m_2 &= \nu - i - r, \\ t_3 &= \max(0, k - x_1 - \nu - r + \rho), & m_3 &= \rho - j - r, \\ t_4 &= \max(0, k - x_1 - x_2), & m_4 &= i + r - j, \\ t_5 &= \max(0, k - x_1 - x_3), & m_5 &= \nu + r - \rho, \\ t_6 &= \max(0, k - x_4), & m_6 &= j - i, \\ t_7 &= \max(0, k - x_5), & m_7 &= \rho - \nu, \end{aligned}$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i \leq r - 1, \nu - j \leq r - 1, \rho - \nu \leq r - 1,$$

$$(29) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i A_j A_\nu) \Pr(A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i \leq r - 1, \nu - j \leq r - 1, \rho - \nu > r - 1,$$

$$(30) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j A_\nu A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i > r - 1, \nu - j \leq r - 1, \rho - \nu \leq r - 1,$$

$$(31) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j A_\nu) \Pr(A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i > r - 1, \nu - j \leq r - 1, \rho - \nu > r - 1,$$

$$(32) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i A_j) \Pr(A_\nu A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i \leq r - 1, \nu - j > r - 1, \rho - \nu \leq r - 1,$$

$$(33) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i A_j) \Pr(A_\nu) \Pr(A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i \leq r - 1, \nu - j > r - 1, \rho - \nu > r - 1,$$

$$(34) \quad \Pr \{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j) \Pr(A_\nu A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i > r - 1, \nu - j > r - 1, \rho - \nu \leq r - 1, \\ (35) \quad \Pr\{A_i A_j A_\nu A_\rho\} = \Pr(A_i) \Pr(A_j) \Pr(A_\nu) \Pr(A_\rho),$$

$$\text{ha } \rho - i > r - 1; \nu - i > r - 1, \rho - j > r - 1; j - i > r - 1, \nu - j > r - 1, \rho - \nu > r - 1.$$

Megjegyezzük, hogy a (24) és (30) esetek csak a  $\Pr(A_j A_\nu A_\rho)$  valószínűség számításában különböznek egymástól, és hasonlóan, a (27) és (29) esetek csak a  $\Pr(A_i A_j A_\nu)$  valószínűség számításában különböznek egymástól.

Az  $S_1, S_2, S_3$  és  $S_4$  végső számítási képleteinek a megadásához a következő fontos észrevétel az, hogy  $\Pr(A_i)$  nem függ az  $i$  indextől és az összes fentebb megadott kifejezés sem függ közvetlenül az  $i, j, \nu$  és  $\rho$  indexektől, hanem csak az  $u = j - i, z = \nu - j, v = \rho - \nu$  különbségeken keresztül. Jelölje  $W$  a  $\Pr(A_i)$  valószínűséget,  $g(u)$  a  $\Pr(A_i A_j)$  valószínűséget, amikor  $j - i = u$ ,  $h(u, z)$  a  $\Pr(A_i A_j A_\nu)$  valószínűséget, amikor  $j - i = u, \nu - j = z$  és  $f(u, z, v)$  a  $\Pr(A_i A_j A_\nu A_\rho)$  valószínűséget, amikor  $j - i = u, \nu - j = z, \rho - \nu = v$ . Ha ezek után összeszámoljuk az összes lehetséges  $u, z, v$  különbség előfordulási számát az összes lehetséges  $1 \leq i < j < \nu < \rho \leq N$  index halmazra, akkor könnyen nyerjük az alábbi végső, az előzőknél sokkal hatékonyabb számítási képleteket:

$$(36) \quad S_1 = NW,$$

$$(37) \quad S_2 = \binom{N-r+1}{2} W^2 + \sum_{u=1}^m \binom{N-u}{1} g(u),$$

ahol

$$m \equiv \min(r-1, N-1),$$

$$(38) \quad S_3 = \binom{N-2r+2}{3} W^3 + 2W \sum_{u=1}^m \binom{N-u-r+1}{2} g(u) \\ + \sum_{u=1}^t \sum_{z=1}^s \binom{N-u-z}{1} h(u, z),$$

ahol

$$m \equiv \min(r-1, N-r-1)$$

$$s \equiv \min(r-1, N-1-u)$$

$$t \equiv \min(r-1, N-2)$$

$$(39) \quad S_4 = \binom{N-3r+3}{4} W^4 + 3W^2 \sum_{u=1}^m \binom{N-u-2r+2}{3} g(u) \\ + \sum_{u=1}^t \sum_{z=1}^s \binom{N-u-z-r+1}{2} g(u) g(z) \\ + 2W \sum_{u=1}^t \sum_{z=1}^s \binom{N-u-z-r+1}{2} h(u, z) \\ + \sum_{u=1}^a \sum_{z=1}^b \sum_{v=1}^c \binom{N-u-z-v}{1} f(u, z, v),$$

ahol

$$\begin{aligned} m &\equiv \min(r-1, N-2r-2), \\ s &\equiv \min(r-1, N-1-r-u), \\ t &\equiv \min(r-1, N-2-r), \\ c &\equiv \min(r-1, N-1-u-z), \\ b &\equiv \min(r-1, N-2-u), \\ a &\equiv \min(r-1, N-3). \end{aligned}$$

#### 4. Numerikus eredmények

Mielőtt a teszt feladatok eredményeit megadnánk, néhány megjegyzést teszünk a közölt algoritmusok kódolásáról. Az, hogy a képletek a megadott formában vannak, valamint hogy a binomiális együtthatók számítására szolgáló, jól tesztelt számítógépes program legtöbbször rendelkezésére áll, könnyen félrevezetheti a programozót. Először is észre kell venni, hogy például a (22), (23), (25), (26) és (28) képletek egymásba skatulyázott összegzéseiben csak az összegzések alsó és felső határai, valamint a binomiális együtthatók felső számai változnak. Ezért elég az egymásba skatulyázott összegzést csak egyszer kódolni, miközben az esetenként fellépő különbségeket egy alkalmas feltételes utasításban lehet kezelni. Ugyanezekben a képletekben a  $p^{p-i+r}$  kifejezés nem függ az  $x_1, \dots, x_7$  összegzési változóktól, így az kiemelhető az összegzésekből. A megmaradó  $q^x p^{-x}$  kifejezést pedig célszerű úgy tekinteni, mint  $t^{x_1} \dots t^{x_7}$ , ahol  $t = \frac{q}{p}$  és mindegyik  $t^{x_i}$  exponenciális kifejezés kiemelhető a saját,  $i$ -edik összegzésébe. Ezen túlmenően, az exponenciális kifejezést egyszerűbben úgy is elő lehet állítani, hogy az összegzendő kifejezésre minden alkalommal rászorzunk  $t$ -vel, amikor belépünk a megfelelő összegzésbe. Hasonló megfontolás alkalmazható a binomiális együtthatók előállítására is. Azok ugyancsak kiemelhetők a saját összegzésükbe, és ahelyett, hogy egyben, egy előre elkészített eljárással számítanánk az értéküket, elő lehet őket is állítani úgy, hogy az összegzendő kifejezésre minden alkalommal rászorzunk a megfelelő hányadossal, amikor belépünk a hozzá tartozó összegzésbe. Ha valaki nem veszi figyelembe a fenti megjegyzéseket, akkor tapasztalataink szerint könnyen kaphat akár egy nagyságrenddel nagyobb futási időket is. A kódot Fortran nyelven készítettük el, azonban az könnyen átírható bármely magas szintű programozási nyelvre is. Kérésre a kódot az olvasó rendelkezésére bocsájtjuk.

A [32] dolgozatban közölt összes teszt feladatra kiszámoltuk az általunk javasolt új korlátokat. Az újabb Jun Cai [14] féle korlátokat szintén kiszámoltuk, hogy az ő korlátjaival is össze tudjuk hasonlítani az eredményeinket. Mivel azonban Sfakianakis, Kounias és Hillaris [32] dolgozatának teszt feladatai mind igen kevés számítási időt (mindig kevesebbet mint fél másodperc) igényeltek még a mi új, nagyobb számítási időigényű algoritmusunkra is, azért ezek közül a teszt feladatok közül csak három eredményeit adjuk itt meg. Egy alacsony, egy közepes és egy magas megbízhatóságú rendszerre vonatkozó feladatot választottunk, amelyek eredményei az 1-3. Táblázatokban láthatók. Minden eredmény táblázatban a rendszer hibázási valószínűsége helyett a rendszer megbízhatóságát

adtuk meg, ennek következménye az, hogy a Hunter-Worsley korlátok nem felső, hanem alsó korlátként jelennek meg. A számítási idők másodpercben vannak megadva, mely idők egy nem túl erős IBM/PC 486-os gépre vonatkoznak. Megjegyezzük még, hogy az  $S_1 - S_4$  alapú felső korlátok számítására megadott számítási idő értékek nem tartalmazzák a lineáris programozási feladat megoldásához szükséges időt. Minthogy azonban ezek a lineáris programozási feladatok csak 4 feltételi sorból és  $N$  változóból állnak, a megoldási idejük egyszer sem volt több, mint 0,4 másodperc. A táblázatokban félkövér karakterek jelzik az elért legjobb alsó és felső korlátokat.

### 1. TÁBLÁZAT

$$n=15; r=12; k=8; p=0,25; R(p; k, r, n)=0,083732$$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	0,060855	—	0,00
Jun Cai	0,005978	0,117444	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,026704	0,113997	0,00
$S_1 - S_3$ alapú	0,075245	0,094621	0,00
$S_1 - S_4$ alapú	<b>0,083732</b>	<b>0,083732</b>	0,00

### 2. TÁBLÁZAT

$$n=15; r=10; k=4; p=0,75; R(p; k, r, n)=0,605$$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	0,556878	—	0,00
Jun Cai	0,458578	0,650816	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,414059	0,689743	0,00
$S_1 - S_3$ alapú	0,542885	0,642020	0,00
$S_1 - S_4$ alapú	<b>0,592429</b>	<b>0,624833</b>	0,11

### 3. TÁBLÁZAT

$$n=15; r=7; k=5; p=0,75; R(p; k, r, n)=0,943$$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	0,937683	—	0,00
Jun Cai	0,915291	0,955888	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,908386	0,959167	0,00
$S_1 - S_3$ alapú	0,935213	0,953564	0,00
$S_1 - S_4$ alapú	<b>0,939131</b>	<b>0,946618</b>	0,00

Most tekintsünk néhány olyan feladatot, amelyek a szükséges számítások szempontjából lényegesen nehezebbek. A következő 4-6. Táblázatok ilyen feladatok eredményeit tartalmazzák. Elég meglepő módon, ezekre a feladatokra legtöbbször az igen gyorsan számítható Hunter-Worsley alsó korlát a legjobb. Ugyanakkor a Jun Cai-féle felső korlát ezekben az esetekben jobb, mint az  $S_1 - S_2$  alapú és mint az  $S_1 - S_3$  alapú felső korlátok, sőt majdnem olyan jó is, mint az  $S_1 - S_4$  alapú felső korlát. Minhogy a Boole-Bonferroni típusú korlátok számítása ugyanakkor egyre időigényesebbé válik, gyakran jó lehet az a választás, hogy alsó korlátként a Hunter-Worsley-féle korlátot, felső korlátként pedig a Jun-Cai-féle felső korlátot használjuk.

#### 4. TÁBLÁZAT

$$n=30; r=6; k=3; p=0,90; R(p; k, r, n)=0,849$$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	<b>0,826686</b>	—	0,00
Jun Cai	0,808737	0,872487	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,645080	0,887979	0,00
$S_1 - S_3$ alapú	0,813148	0,883681	0,05
$S_1 - S_4$ alapú	0,821332	<b>0,863686</b>	0,77

#### 5. TÁBLÁZAT

$$n=40; r=7; k=4; p=0,90; R(p; k, r, n)=0,957$$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	<b>0,953970</b>	—	0,06
Jun Cai	0,946411	0,965519	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,912851	0,969499	0,00
$S_1 - S_3$ alapú	0,951474	0,968673	0,06
$S_1 - S_4$ alapú	0,952190	<b>0,961632</b>	1,59

#### 6. TÁBLÁZAT

$$n=50; r=40; k=28; p=0,50; R(p; k, r, n)=0,979$$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	0,973921	—	0,11
Jun Cai	0,934483	0,988156	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,956041	0,986315	0,05
$S_1 - S_3$ alapú	0,969696	0,983198	1,04
$S_1 - S_4$ alapú	<b>0,975355</b>	<b>0,981644</b>	15,93

Az utolsó táblázatban (7. Táblázat) egy valóban nehéz feladat eredményeit adjuk meg. Látható, hogy ebben az esetben a Jun Cai-féle korlátok szinte semmitmondóak, az  $S_1 - S_4$  alapú korlátok ugyancsak nem túl élesek, habár a számolási idejük több volt, mint 300 másodperc. Vegyük észre, hogy ugyanakkor a feladat paraméterei nem sokban különböznek a korábbi teszt feladatok paramétereitől.

## 7. TÁBLÁZAT

$n=50; r=40; k=28; p=0,50; R(p; k, r, n)=0,979$

Módszer	Alsó korlát	Felső korlát	Idő (sec)
Hunter-Worsley	0,345101	—	0,44
Jun Cai	0,063374	0,697489	0,00
$S_1 - S_2$ alapú	0,000000	0,666344	0,11
$S_1 - S_3$ alapú	0,208881	0,611553	8,56
$S_1 - S_4$ alapú	<b>0,416017</b>	<b>0,588365</b>	302,20

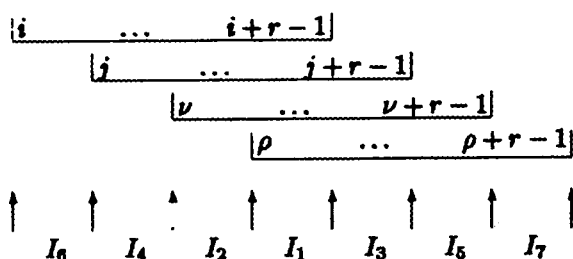
Az 1. Táblázat teszt feladatában a legjobb alsó és felső korlátok egymással egyenlők voltak, így ez a közös érték a rendszer pontos megbízhatóságának az értékét is jelentette. A további esetekben a rendszer pontos megbízhatóságának az értékét egy Monte Carlo szimulációs algoritmussal közelítettük, amelyben alkalmaztuk a a második szerző egy szórás csökkentő eljárását (lásd [33]).

## Függelék

Az  $S_1, S_2, S_3$  és  $S_4$  számítására közölt képletek származtatásá mind hasonló módon, a teljes valószínűség tételének rekurzív alkalmazásával történhet. Sok esetben erre sincs azonban szükség, hiszen gyakran vannak a szorzatban szereplő események között diszjunktak is, mikoris az egyes elemek egymástól való függetlensége miatt a teljes szorzat valószínűsége szétesik kevesebb események szorzatai már ismert módon számítható valószínűségeinek a szorzatára. Az alábbiakban ezért az  $S_4$  számítására csak az első nem triviális eset képletének a levezetését adjuk meg. A további esetekre pedig csak a képzendő részintervallumokat azonosító ábrákat mutatjuk be.

### 1. Eset

Ha  $\rho - i \leq r - 1$ , akkor tekintsük a következő ábrát:



ahol

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \{\rho, \dots, i+r-1\}, & |I_1| &= i+r-\rho, \\
 I_2 &= \{\nu, \dots, \rho-1\}, & |I_2| &= \rho-\nu, \\
 I_3 &= \{i+r, \dots, j+r-1\}, & |I_3| &= j-i, \\
 I_4 &= \{j, \dots, \nu-1\}, & |I_4| &= \nu-j, \\
 I_5 &= \{j+r, \dots, \nu+r-1\}, & |I_5| &= \nu-j, \\
 I_6 &= \{i, \dots, j-1\}, & |I_6| &= j-i, \\
 I_7 &= \{\nu+r, \dots, \rho+r-1\}, & |I_7| &= \rho-\nu.
 \end{aligned}$$

Így ebben az esetben összesen 7 intervallumot jelölhattünk ki, melyekre a következőképpen lehet okoskodni:

1. *Intervallum.*  $I_1$ -ben legalább  $k - \rho + i$  elemnek kell hibásnak lenni, különben  $E_i^{k,r}, E_j^{k,r}, E_\nu^{k,r}$  és  $E_\rho^{k,r}$ -ben nem lehet legalább  $k$  hibás elem.  $I_1$ -ben legfeljebb  $i+r-\rho$  elem lehet hibás, hiszen csak ennyi elem van összesen  $I_1$ -ben. Ekkor a teljes valószínűség tétele szerint azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 &\Pr\{A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r}\} = \\
 &\sum_{x_1=t_1}^{m_1} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1\text{-ben } x_1 \text{ hibás elem van}) \\
 &\quad \cdot \binom{i+r-\rho}{x_1} q^{x_1} p^{i+r-\rho-x_1}, \\
 &t_1 = \max(0, k - \rho + i), \\
 &m_1 = i + r - \rho.
 \end{aligned}$$

2. *Intervallum.*  $I_2$ -ben legalább  $k - x_1 - \nu + i$  elemnek kell hibásnak lenni és legfeljebb  $\rho - \nu$  elem lehet hibás. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
 &\Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1\text{-ben } x_1 \text{ hibás elem van}) = \\
 &\sum_{x_2=t_2}^{m_2} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, I_2\text{-ben } x_1, x_2 \text{ hibás elem van}) \\
 &\quad \cdot \binom{\rho-\nu}{x_2} q^{x_2} p^{\rho-\nu-x_2}, \\
 &t_2 = \max(0, k - x_1 - \nu + i), \\
 &m_2 = \rho - \nu.
 \end{aligned}$$



3. *Intervallum.*  $I_3$ -ban legalább  $k - x_1 - x_2 - \nu + j$  elemnek kell hibásnak lenni és legfeljebb  $j + r - (i + r) = j - i$  elem lehet hibás. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, I_2\text{-ben } x_1, x_2 \text{ hibás elem van}) = \\ & \sum_{x_3=t_3}^{m_3} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, I_2, I_3\text{-ban } x_1, x_2, x_3 \text{ hibás elem van}) \\ & \quad \cdot \binom{j-i}{x_3} q^{x_3} p^{j-i-x_3}, \\ & t_3 = \max(0, k - x_1 - x_2 - \nu + j), \\ & m_3 = j - i. \end{aligned}$$

4. *Intervallum.*  $I_4$ -ben legalább  $k - x_1 - x_2 - x_3$  elemnek kell hibásnak lenni és legfeljebb  $\nu - j$  elem lehet hibás. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, I_2, I_3\text{-ban } x_1, x_2, x_3 \text{ hibás elem van}) = \\ & \sum_{x_4=t_4}^{m_4} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_4\text{-ben } x_1, \dots, x_4 \text{ hibás elem van}) \\ & \quad \cdot \binom{\nu-j}{x_4} q^{x_4} p^{\nu-j-x_4}, \\ & t_4 = \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), \\ & m_4 = \nu - j. \end{aligned}$$

5. *Intervallum.*  $I_5$ -ben legalább  $k - x_1 - x_2 - x_3$  elemnek kell hibásnak lenni és legfeljebb  $\nu + r - (j + r) = \nu - j$  elem lehet hibás. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_4\text{-ben } x_1, \dots, x_4 \text{ hibás elem van}) = \\ & \sum_{x_5=t_5}^{m_5} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_5\text{-ben } x_1, \dots, x_5 \text{ hibás elem van}) \\ & \quad \cdot \binom{\nu-j}{x_5} q^{x_5} p^{\nu-j-x_5}, \\ & t_5 = \max(0, k - x_1 - x_2 - x_3), \\ & m_5 = \nu - j. \end{aligned}$$

6. *Intervallum.*  $I_6$ -ban legalább  $k - x_1 - x_2 - x_4$  elemnek kell hibásnak lenni és legfeljebb

$j - i$  elem lehet hibás. Így azt kapjuk, hogy

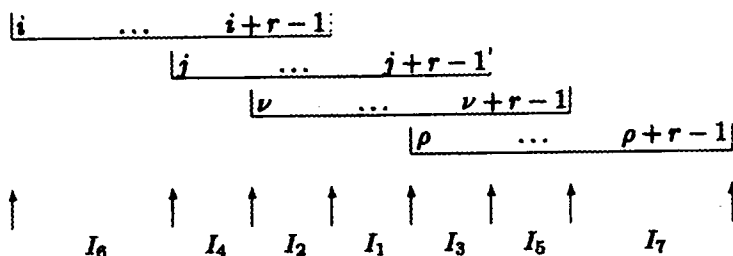
$$\begin{aligned} & \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_5 \text{-ben } x_1, \dots, x_5 \text{ hibás elem van}) = \\ & \sum_{x_6=t_6}^{m_6} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_6 \text{-ban } x_1, \dots, x_6 \text{ hibás elem van}) \\ & \quad \cdot \binom{j-i}{x_6} q^{x_6} p^{j-i-x_6}, \\ & t_6 = \max(0, k - x_1 - x_2 - x_4), \\ & m_6 = j - i. \end{aligned}$$

7. *Intervallum.*  $I_7$ -ben legalább  $k - x_1 - x_3 - x_5$  elemnek kell hibásnak lenni és legfeljebb  $\rho - \nu$  elem lehet hibás. Így azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_6 \text{-ban } x_1, \dots, x_6 \text{ hibás elem van}) = \\ & \sum_{x_7=t_7}^{m_7} \Pr(A_i^{k,r} A_j^{k,r} A_\nu^{k,r} A_\rho^{k,r} \mid I_1, \dots, I_7 \text{-ben } x_1, \dots, x_7 \text{ hibás elem van}) \\ & \quad \cdot \binom{\rho-\nu}{x_7} q^{x_7} p^{\rho-\nu-x_7}, \\ & \quad \cdot \binom{\rho-\nu}{x_7} q^{x_7} p^{\rho-\nu-x_7}, \\ & t_7 = \max(0, k - x_1 - x_3 - x_5), \\ & m_7 = \rho - \nu. \end{aligned}$$

Ha most a kapott képleteket 7-től 1-ig sorra visszahelyettesítjük egymásba, akkor megkapjuk a (22) képletet.

2. Eset



## 3. Eset

$$\begin{array}{c}
 [i \dots i+r-1] \\
 [j \dots j+r-1] \\
 [\nu \dots \nu+r-1] \\
 [\rho \dots \rho+r-1]
 \end{array}$$

## 4. Eset

$$\begin{array}{c}
 [i \dots i+r-1] \\
 [j \dots j+r-1] \\
 [\nu \dots \nu+r-1] \\
 [\rho \dots \rho+r-1]
 \end{array}$$

$\uparrow \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \uparrow$   
 $I_6 \quad \quad \quad I_4 \quad I_2 \quad I_1 \quad I_3 \quad \quad I_5 \quad \quad I_7$

## 5. Eset

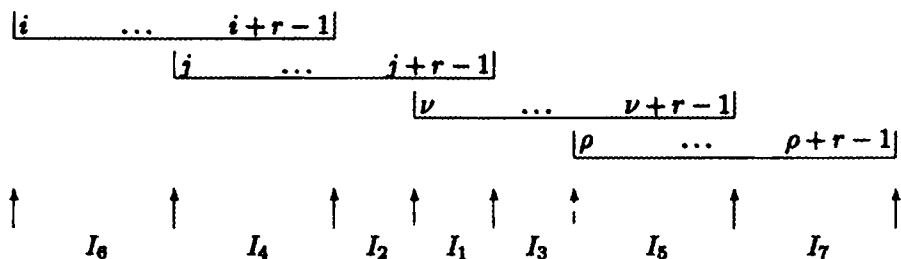
$$\begin{array}{c}
 [i \dots i+r-1] \\
 [j \dots j+r-1] \\
 [\nu \dots \nu+r-1] \\
 [\rho \dots \rho+r-1]
 \end{array}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$   
 $I_6 \quad \quad I_4 \quad \quad I_2 \quad I_1 \quad I_3 \quad I_5 \quad \quad I_7$

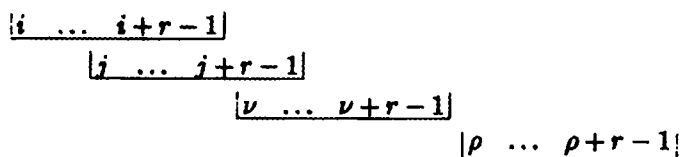
## 6. Eset

$$\begin{array}{c}
 [i \dots i+r-1] \\
 [j \dots j+r-1] \\
 [\nu \dots \nu+r-1] \\
 [\rho \dots \rho+r-1]
 \end{array}$$

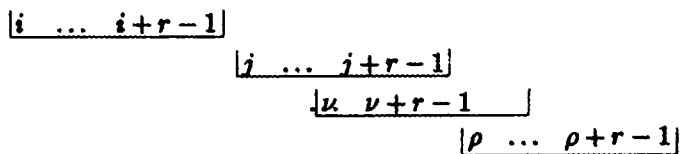
## 7. Eset



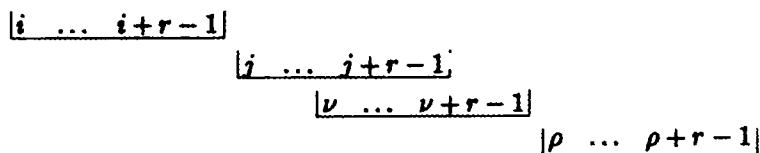
## 8. Eset



## 9. Eset



## 10. eset



## 11. Eset

$$\begin{array}{c}
 \boxed{i \dots i+r-1} \\
 \boxed{j \dots j+r-1} \\
 \boxed{\nu \dots \nu+r-1} \\
 \boxed{\rho \dots \rho+r-1}
 \end{array}$$

## 12. Eset

$$\begin{array}{c}
 \boxed{i \dots i+r-1} \\
 \boxed{j \dots j+r-1} \\
 \boxed{\nu \dots \nu+r-1} \\
 \boxed{\rho \dots \rho+r-1}
 \end{array}$$

## 13. Eset

$$\begin{array}{c}
 \boxed{i \dots i+r-1} \\
 \boxed{j \dots j+r-1} \\
 \boxed{\nu \dots \nu+r-1} \\
 \boxed{\rho \dots \rho+r-1}
 \end{array}$$

## 14. Eset

$$\begin{array}{c}
 \boxed{i \dots i+r-1} \\
 \boxed{j \dots j+r-1} \\
 \boxed{\nu \dots \nu+r-1} \\
 \boxed{\rho \dots \rho+r-1}
 \end{array}$$

Látható, hogy a további nem triviális esetek a 2, 4, 5 és 7. esetek, melyekre a megfelelő képletek az 1. esethez hasonlóan levezethetők. Ezzel az  $S_4$  számítására közölt képletek igazolását befejeztük.

## IRODALOM

- [1] E. BOROS, A. PRÉKOPÁ,, „Closed form two-sided bounds for probabilities that exactly  $r$  and at least  $r$  out of  $n$  events occur”, *Mathematics of Operations Research* 14 (1989), 317–342.
- [2] M.T. CHAO, J.C. FU, M.V. KOUTRAS, „Survey of reliability studies of consecutive-k-out-of-n:F & related systems”, *IEEE Trans. Reliability* R-44 (1995 Mar), 120–127.
- [3] O. CHRYSAPHINOY, S. PAPASTAVRIDIS, „Reliability of a consecutiv-k-out-of-n:F system in a random environment”, *J. Applied Probability* 27 (1990), 452–458.
- [4] O. CHRYSAPHINOY, S. PAPASTAVRIDIS, „Limit distribution for a consecutive-k-out-of-n:F system”, *Adv. Applied Probability* 22 (1990), 491–493.

- [5] D. DAWSON, A. SANKOFF, „An inequality for probabilities”, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* 18 (1967), 504–507.
- [6] C. DERMAN, G.J. LIBERMAN, S. ROSS, „On the consecutive-k-out-of-n:F system”, *IEEE Trans. Reliability* R-31 (1982 Apr), 57–63.
- [7] J.C. FU, „Reliability of a large consecutive-k-out-of-n:F system”, *IEEE Trans. Reliability* R-34 (1985 Jun), 127–130.
- [8] J.C. FU, „Bounds for reliability of large consecutive-k-out-of-n:F systems with unequal component probabilities”, *IEEE Trans. Reliability* R-35 (1986 Aug), 316–319.
- [9] J.C. FU, „Reliability of consecutive-k-out-of-n:F systems with (k-1)step Markov dependence”, *IEEE Trans. Reliability* R-35 (1986 Dec), 602–606.
- [10] J. GALAMBOS, „Bonferroni inequalities”, *Annals of Probability* 5 (1977), 577–581.
- [11] A. HABIB, T. SZÁNTAI, „Correction to: Reliability of a Consecutive-k-out-of-r-from-n:F System”, *IEEE Transactions on Reliability* 46 (1997), 282.
- [12] TH. HAILPERIN, „Best possible inequalities for the probability of a logical function of events”, *The Amer. Math. Monthly* 72 (1965), 343–359.
- [13] D. HUNTER, „An upper bound for the probability of a union”, *J. Appl. Prob.* 13 (1976), 597–603.
- [14] JUN CAI, „Reliability of a large consecutive-k-out-of-r-from-n:F system with unequal component-reliability”, *IEEE Trans. Reliability* R-43 (1994 Mar), 107–111.
- [15] S. KOUNIAS, M. SFAKIANAKIS, „The reliability of a linear system and its connection with the generalized birthday problem”, *Statistica Applicata* 3 (1991), 531–543.
- [16] S. KOUNIAS, M. SFAKIANAKIS, „A combinatorial problem associated with the reliability of a circular system”, *Proc. HERMIS'92 (Lipitakis, ed)* (1992), 187–196.
- [17] M.V. KOUTRAS, S.G. PAPASTAVRIDIS, „Application of the Stein-Chen method for bounds and limit theorems in the reliability of coherent structures”, *Nav. Research Logistics* 40 (1993), 617–631.
- [18] J.B. KRUSKAL, „On the shortest spanning subtree of a graph and the travelling salesman problem”, *Proc. of the Amer. Math. Soc.* 7 (1956), 48–50.
- [19] S.M. KWEREL, „Most stringent bounds on aggregated probabilities of partially specified dependent probability systems”, *J. of the Amer. Stat. Assoc.* 70 (1975), 472–479.
- [20] S.M. KWEREL, „Bounds on the probability of a union and intersection of m events”, *Advances of Applied Probability* 7 (1975), 431–448.
- [21] S. PAPASTAVRIDIS, „A Weibull limit for the reliability of consecutive-k-within-m-out-of-n system”, *Adv. Applied Probability* 20 (1988), 690–692.
- [22] S. PAPASTAVRIDIS, M.V. KOUTRAS, „Consecutive-k-out-of-n:F systems with maintenance”, *Ann. Inst. Statist. Math* 44 (1992), 605–612.
- [23] S. PAPASTAVRIDIS, M.V. KOUTRAS, „Bounds for reliability of consecutive-k-within-m-out-of-n systems”, *IEEE Trans. Reliability* R-42 (1993 Mar), 156–160.
- [24] S. PAPASTAVRIDIS, M.E. SFAKIANAKIS, „Optimal arrangement and importance of the components in a consecutive-k-out-of-r-from-n:F system”, *IEEE Trans. Reliability* R-40 (1991 Aug), 277–279.
- [25] A. PRÉKOPA, „Boole-Bonferroni inequalities and linear programming”, *Operations Research* 36 (1988), 145–162.
- [26] A. PRÉKOPA, „Sharp bounds on probabilities using linear programming”, *Operations Research* 38 (1990), 227–239.
- [27] A. PRÉKOPA, *Stochastic Programming*, 1995.
- [28] A. PRÉKOPA, B. VIZVÁRI, „Lower and upper bounds on probabilities of Boolean Functions of events”, *RUTCOR Research Report 99-93* (July 1995).
- [29] J. RIORDAN, *Combinatorial Identities*, 1968.
- [30] M. SFAKIANAKIS, „Birnbaum importance of components in a consecutive-k-out-of-r-from-n:F system”, *Proc. IASTED Conf* (1992), 36–37.
- [31] M. SFAKIANAKIS, „Optimal arrangement of components in a consecutive-k-out-of-r-from-n:F system”, *Microelectronics&Reliability* 33 (1993), 1573–1578.

- [32] M. SFAKIANAKIS, S. KOUNIAS, A. HILLARIS, „Reliability of a consecutive-k-out-of-r-from-n:F system”, *IEEE Trans. Reliability* **R-41** (1992 Sep), 442–447.
- [33] T. SZÁNTAI, „Evaluation of a special multivariate gamma distribution”, *Math. Prog. Study* **27** (1986), 1–16.
- [34] L. TAKÁCS, „On the general probability theorem”, *Communications of the Dept. of Math. and Physics of the Hungarian Acad. Sci.* **5** (1955), 467–476.
- [35] Y.L. TONG, „A rearrangement inequality for the longest run, with an application to network reliability”, *J. Applied Probability* **22** (1985), 286–393.
- [36] K.J. WORSLEY, „An improved Bonferroni inequality and applications”, *Biometrika* **69** (1982), 297–302.

(Beérkezett: 1996. május 6.)

AZIZ HABIB ÉS SZÁNTAI TAMÁS  
BME MATEMATIKAI INTÉZET  
DIFFERENCIÁLEGYENLETEK TANSZÉK  
1111 BUDAPEST, MŰEGYETEM RKP. 3.

# NEW BOUNDS ON THE RELIABILITY OF THE CONSECUTIVE $k$ -OUT-OF- $r$ -FROM- $n$ : FF SYSTEM

A. HABIB AND T. SZÁNTAI

In this paper we give new lower and upper bounds on the failing probability resp. reliability of consecutive  $k$ -out-of- $r$ -from- $n$ :F reliability systems. They belong to the family of Boole–Bonferroni type bounds. Further we propose the application of the Hunter–Worsley bound in the framework of reliability system analysis. Numerical results of the formerly published test examples and more harder problems are given. The computer code was written in Fortran and is available on request from the authors.





## A LINEÁRIS ALTERNATÍVA-, EGZISZTENCIA- ÉS DUALITÁSI TÉTELEK EKVIVALENCIÁJA

SZILÁGYI PÉTER

Budapest

Cikkünkben bebizonyítjuk a klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tételek, valamint az ezek általánosításával nyert inhomogén lineáris alternatíva- és egzisztencia-tételek egymás közti és a lineáris programozás dualitási tételeivel való ekvivalenciáját.

A matematikai programozás elméletében gyakran használnak fel alternatíva-tételeket. Ezek egy egyenlőtlenségrendszer megoldhatóságának ekvivalenciáját mondják ki egy (vagy több) másik, ún. duális egyenlőtlenségrendszer inkonzisztenciájával. E tételek közül is leginkább a lineáris alternatíva-tételeket alkalmazzák, mikor is az egyenlőtlenségrendszerek lineárisak. Hasonlóan nagy — elméleti és gyakorlati — jelentősége van a lineáris programozás dualitási tételeinek is, illetve ezekkel kapcsolatban az ún. lineáris egzisztencia-tételeknek. (Ld. pl. [4] vagy [5].)

A fenti, homogén alakban régóta közismert alternatíva- és egzisztencia-tételeket a [6] publikációban általánosítottuk az inhomogén (pontosabban a homogén esetet is magába foglaló inhomogén) egyenlőtlenségrendszerek esetére. [6]-ban megadtunk két általános alternatíva-tételt (az inhomogén Slater- és az inhomogén Mangasarian alternatíva-tételt), melyeknek az összes többi alternatíva-tétel *speciális esete*. Mégis, a korábbi alternatíva-tételek levezetései és a [6]-ban közölt bizonyítások sejtetni engedik, hogy az általános formulák ellenére egyik alternatíva- vagy egzisztencia-tétel sem erősebb a másiknál. Pontosabban: a bizonyításokból látszik, hogy az alternatíva-tételek bizonyításához - elemi algebrai eszközökön kívül - semmi egyébre nincs szükség, csak egy vagy több alternatíva- vagy egzisztencia-tétel felhasználására. A jelen cikkben az előbbi sejtést bizonyítjuk be.

Előbb azonban felsoroljuk azokat a tételeket, amelyek ekvivalenciáját bizonyítjuk. (Az összes tétel kimondása — a lineáris programozás dualitási tételeinek kivételével — megtalálható [6]-ban.) Az egyes tételek neve után a tételnek cikkünk ábráin alkalmazott rövidítése szerepel.

### *Klasszikus alternatíva-tételek:*

Gordan tétel (GO); Stiemke tétel (ST); Farkas tétel (F); Motzkin tétel (MO); Tucker alternatíva-tétel (TA); Slater tétel (SL); Gale 1., 2., 3., 4. és 5. tétele (rendre GA1, GA2, GA3, GA4 és GA5); Mangasarian 1., 2., 3. és 4. tétele (rendre MA1, MA2, MA3 és MA4); inhomogén Farkas tétel (NHF); Neumann tétel (N); Tucker egzisztencia-lemma (TEL); Tucker 1. és 2. egzisztencia-tétele (TE1, TE2);

### *az előző tételek inhomogén általánosításai:*

NHMO; NHTA; NHSL; NHGA3; NHGA4; NHGA5; NHMA1; NHMA3; NHMA4; NHN; NHTEL; NHTE1; NHTE2; Kuhn-Fourier tétel (KF); Ky Fan tétel (KYF);

valamint:

a [6] cikk 4.1 - 4.9 tétele (ezekre egyszerűen csak 4.1.T., ..., 4.9.T.-vel hivatkozunk) és a ([6]-ban nem szereplő) lineáris programozási dualitási tételek (D1, D2) (ld. pl. [5]-ben), melyeket most a teljesség kedvéért kimondunk.

1. TÉTEL. (1. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI DUALITÁSI TÉTEL). (D1)

Legyen  $P$  tetszőleges valós mátrix,  $p, q$  tetszőleges valós vektor. Legyen (P) és (D) az alábbi lineáris programozási primál-duál feladatpár:

$$\begin{array}{ll} \text{(P)} & \text{(D)} \\ \{\max q^T x \mid Px \leq p, x \geq 0\} & \{\min p^T y \mid P^T y \geq q, y \geq 0\} \end{array}$$

Akkor: ha (P) és (D) valamelyikének van optimális megoldása, akkor a másik feladatnak is van, és a két optimumérték megegyezik.

2. TÉTEL. (2. LINEÁRIS PROGRAMOZÁSI DUALITÁSI TÉTEL). (D2)

Legyenek  $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$  tetszőleges valós mátrixok,  $p_1, p_2, q_1, q_2$  tetszőleges valós vektorok. Legyen (P\*) az alábbi lineáris programozási feladat, (D\*) pedig a duálja:

$$(P^*) \quad \{\max(q_1^T x_1 + q_2^T x_2) \mid P_{11}x_1 + P_{12}x_2 \leq p_1, P_{21}x_1 + P_{22}x_2 = p_2, x_1 \geq 0\}$$

$$(D^*) \quad \{\min(p_1^T y_1 + p_2^T y_2) \mid P_{11}^T y_1 + P_{21}^T y_2 \geq q_1, P_{12}^T y_1 + P_{22}^T y_2 = q_2, y_1 \geq 0\}$$

Akkor: ha (P\*) és (D\*) valamelyikének van optimális megoldása, akkor a másik feladatnak is van, és a két optimumérték megegyezik.

Ezek után most már kimondható a fő tétel:

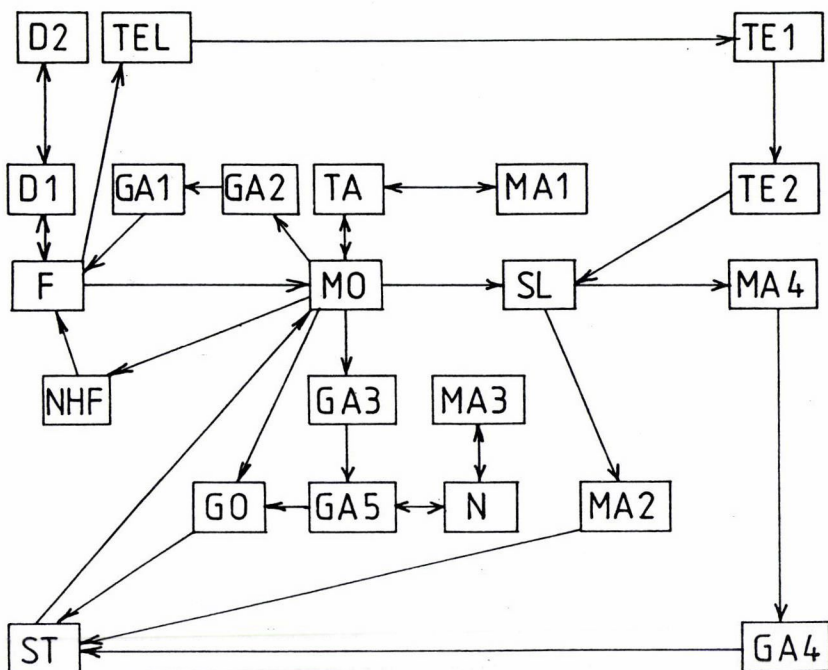
3. TÉTEL. (AZ ALTERNATÍVA-TÉTELEK EKVIVALENCIÁJA). Az összes ismertetett lineáris alternatíva- és egzisztencia-tétel, valamint a lineáris programozás dualitási tételei ekvivalensek egymással, azaz bármelyik fennállásából bármelyik másik fennállása bizonyítható, más tétel felhasználása nélkül.

1. MEGJEGYZÉS. Az egyes alternatíva-tételek bizonyítása alapján csak az állítható, hogy bármelyik alternatíva-tételhez található olyan másik alternatíva-tétel, amelyikből ő bizonyítható.

A most felírt ekvivalencia-tétel ennél többet mond: azt t.i., hogy bármelyikből bizonyítható bármelyik.

*Bizonyítás.* A bizonyítás két részletben történik: először belátjuk, hogy az összes klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tétel, valamint a lineáris programozás dualitás tételei ekvivalensek, majd a bizonyítás második részében azt mutatjuk meg, hogy az összes, [6]-ban kapott nem klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tételhez van olyan klasszikus alternatíva-tétel, amelyikből ő következik, és van olyan klasszikus alternatíva-tétel is, amely belőle következik. Ezáltal a tételt teljesen bebizonyítjuk.

A bizonyítás első részének állítását az alábbi segéd-tétel adja:



1. ábra

1. SEGÉDTÉTEL. Az összes klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tétel, valamint a lineáris programozás dualitási tételei ekvivalensek egymással.

*Bizonyítás.* (ld. az 1. ábrát)

1. LEMMA. A Gordan tételből következik a Stiemke tétel.

*Bizonyítás.* Ha  $B = O$ , akkor a Stiemke tétel triviálisan teljesül. Ezért feltehető, hogy  $B \neq O$ . Ekkor viszont alkalmazható az [1]-beli bizonyítás  $C = O$ -val (ez az ottani bizonyításban  $B = O$ -nak felel meg), és ezáltal megkapjuk a lemma állítását.

2. LEMMA. A Stiemke tételből következik a Motzkin tétel.

*Bizonyítás.*  $\{Ax < 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset \iff \{Ax < 0, Cx \leq 0, Dx \leq 0, -Dx \leq 0\} \neq \emptyset$  és erre az utóbbi rendszerre alkalmazható a [2] cikk „Vegyes alternatíva-tétel” (Gemischter Alternativsatz) elnevezésű tétele, amelyben éppen a Stiemke tétel segítségével bizonyítja a szerző a(z utóbbi alakra hozott) Motzkin tételt. (A bizonyítás más tételt nem használ fel.)

3. LEMMA. A Motzkin tételből következik a Gordan tétel.

*Bizonyítás.* Azonnal adódik  $C = O$ ,  $D = O$  választással.

4. LEMMA. A Motzkin- és a Tucker alternatíva-tétel ekvivalens.

*Bizonyítás.* Ha a Motzkin tételben  $A = O$ , ill. a Tucker-tételben  $B = O$ , akkor a megfelelő tétel triviálisan teljesül. Ezért feltehető, hogy  $A \neq O$  és  $B \neq O$ . Ekkor:

$$\begin{aligned} \{Ax < 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset &\Leftrightarrow \{Ax < 0, Cx \leq 0, Dx \leq 0, -Dx \leq 0\} \neq \emptyset \text{ illetve} \\ \{Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset &\Leftrightarrow \{Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx \leq 0, -Dx \leq 0\} \neq \emptyset \end{aligned}$$

Alkalmazva [1] eredményét, adódik a lemma.

5. LEMMA. A Tucker alternatíva-tételből következik Mangasarian 1. tétele.

*Bizonyítás.* Az nyilvánvaló, hogy az (MA1) tételbeli mindhárom rendszer egyideűleg nem lehet konzisztens. Tegyük fel ezért pl. hogy  $\{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} = \emptyset$  és  $\{Ax \leq 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} = \emptyset$ . Mivel a 4. lemma szerint a Tucker alternatíva-tételből következik a Motzkin tétel, ezért adódik, hogy:

$$(1) \quad \{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} \neq \emptyset \text{ és}$$

$$(2) \quad \{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} \neq \emptyset$$

De ha  $y^0$  az (1) rendszer megoldása.  $y^{00}$  pedig a (2) rendszeré, akkor az  $y = y^0 + y^{00}$  vektorra

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} \neq \emptyset.$$

6. LEMMA. Mangasarian 1. tételéből következik a Tucker alternatíva-tétel.

*Bizonyítás.*  $A = O$ -val speciális esetként adódik.

7. LEMMA. A Motzkin tételből következik az inhomogén Farkas tétel.

*Bizonyítás.* Ld. [4] 32-33 oldalán. (A bizonyítás csak a Motzkin tételt használja fel.)

8. LEMMA. Az inhomogén Farkas tételből következik a (homogén) Farkas tétel.

*Bizonyítás.* A Farkas tétel az inhomogén Farkas tétel speciális eseteként adódik.

9. LEMMA. A Farkas tételből következik a Motzkin tétel.

*Bizonyítás.*  $\{Ax < 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{Ax \leq -et, Cx \leq 0, Dx = 0, t > 0\} = \emptyset$ , ahol  $e^T = (1, \dots, 1)$

$\Leftrightarrow \{e_{n+1}^T \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} > 0, Ax + et \leq 0, Cx \leq 0, Dx \leq 0, -Dx \leq 0\} = \emptyset$ . Itt  $e_{n+1}^T = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Alkalmazva a Farkas tételt, kapjuk, hogy:

$$\Leftrightarrow \{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, e^T y_1 = 1, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} \neq \emptyset$$

10. LEMMA. *A Farkas tételből következik az 1. LP dualitás tétel.*

*Bizonyítás.* Ld. [5] 175–177 oldalán. (A bizonyítás csak Farkas tételét használja fel.)

11. LEMMA. *Az 1. LP dualitás tételből következik a Farkas tétel.*

*Bizonyítás.* Ld. [5] 180–181 oldalán. (A bizonyítás csak az 1. LP dualitás tételt használja fel.)

12. LEMMA. *Az 1. LP dualitás tételből következik a 2. LP dualitás tétel.*

*Bizonyítás.* Ld. [5] 3. fejezetében a 3.1. pont 2. tételét. (A bizonyítás csak az 1. LP dualitás tételt használja fel.)

13. LEMMA. *A 2. LP dualitás tételből következik az 1. LP dualitás tétel.*

*Bizonyítás.* A 2. LP dualitás tétel speciális eseteként azonnal adódik az 1. LP dualitás tétel.

14. LEMMA. *A Motzkin tételből következik Gale 2. tétele.*

*Bizonyítás.* Ld. [4] 33–34 oldalán. (A bizonyítás csak a Motzkin tételét használja fel.)

15. LEMMA. *Gale 2. tételéből következik Gale 1. tétele.*

*Bizonyítás.*  $\{Dx = d\} = \emptyset \Leftrightarrow \{Dx \leq d, -Dx \leq -d\} \neq \emptyset$  Felhasználva Gale 2. tételét:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \{[D^T - D^T] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0, d^T y_1 - d^T y_2 = -1, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0\} &= \emptyset \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{D^T y = 0, d^T y = 1\} = \emptyset &\Leftrightarrow \{D^T y = 0, d^T y > 0\} = \emptyset \end{aligned}$$

16. LEMMA. *Gale 1. tételéből következik a Farkas tétel.*

*Bizonyítás.* Ha a Farkas tételben  $a = 0$ , akkor a Farkas tétel triviálisan teljesül.

Ha pedig  $a \neq 0$ , akkor alkalmazhatjuk a [3] könyv 2.6. tételének bizonyítását. (A bizonyítás csak Gale 1. tételét használja fel.)

17. LEMMA. *A Motzkin tételből következik Gale 3. tétele.*

*Bizonyítás.*  $\{C^T y \geq 0, c^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{c^T y < 0, \begin{bmatrix} -C^T \\ -E \end{bmatrix} y \leq 0\} = \emptyset$   
Alkalmazva Motzkin tételét:

$$\Leftrightarrow \{ct - Cx_1 - x_2 = 0, t > 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Cx \leq c, x \geq 0\} \neq \emptyset$$

18. LEMMA. *Gale 3. tételéből következik Gale 5. tétele.*

*Bizonyítás.* Ld. [3] 2.10. tételét. (A bizonyítás csak Gale 3. tételét használja fel.)

19. LEMMA. *Gale 5. tételéből következik a Gordan tétel.*

*Bizonyítás.*  $\{A^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \geq 0, -A^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$ . Alkalmazva Gale 5. tételét:

$$\Leftrightarrow \{Ax_1 - Ax_2 < 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Ax < 0\} \neq \emptyset$$

20. LEMMA. *Gale 5. tétele és Neumann tétele ekvivalens.*

*Bizonyítás.*  $\{A^T y > 0, y \geq 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y > 0, y \geq 0\} = \emptyset$  alapján adódik.

21. LEMMA. *Mangasarian 3. tétele ekvivalens a Neumann tétellel.*

*Bizonyítás.*  $\{Ax < 0, x > 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{Ax < 0, x \geq 0\} = \emptyset$  alapján adódik. Hiszen egy nyílt halmaznak ( $\{Ax < 0\}$ ) egy nem üres halmazzal ( $\{x \geq 0\}$ ) való metszete üres akkor és csak akkor, ha a nem üres halmaz belsejével való metszete üres.

22. LEMMA. *A Motzkin tételből következik a Slater tétel.*

*Bizonyítás.* 1) Először tegyük fel, hogy

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \text{ és}$$

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

Mivel a Motzkin tételből a 4. lemma szerint következik a Tucker alternatíva-tétel, ezért adódik, hogy:

$$(3) \quad \{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset \text{ és}$$

$$(4) \quad \{Ax \leq 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset$$

De ha  $x^0$  a (3) rendszer megoldása,  $x^{00}$  pedig a (4) rendszeré akkor az  $x \neq x^0 + x^{00}$  vektorra  $\{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset$ .

2) Tegyük most fel, hogy  $\{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset$ . Ekkor:

$$\{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset \text{ és } \{Ax \leq 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset.$$

Ezekből a Motzkin- ill. a Tucker tétellel kapjuk, hogy:

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \text{ és}$$

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

23. LEMMA. *A Slater tételből következik Mangasarian 2. tétele.*

*Bizonyítás.* Ld. [4] 35. oldalán. (A bizonyítás csak a Slater tételt használja fel.)

24. LEMMA. *Mangasarian 2. tételéből következik a Stiemke tétel.*

*Bizonyítás.* A Stiemke tétel Mangasarian 2. tételének speciális eseteként adódik.

25. LEMMA. *A Farkas tételből következik a Tucker egzisztencia lemma.*

*Bizonyítás.* Ld. [5] 3. fejezetében a 3.2. pont 2. tételét. (A bizonyítás csak Farkas tételét használja fel.)

26. LEMMA. *A Tucker egzisztencia lemmából következik Tucker 1. egzisztencia-tétele.*

*Bizonyítás.* Írjuk át ekvivalens módon a  $\{Cx \geq 0, C^T y = 0, y \geq 0\}$  rendszert:

$$(5) \quad \left\{ \begin{bmatrix} O & C & -C \\ -C^T & O & O \\ C^T & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq 0, y \geq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \right\}$$

Az (5)-beli mátrix ferdén szimmetrikus. Ezért, a Tucker lemmát alkalmazva, kapjuk, hogy (5)-nek van olyan  $y, x_1, x_2$  megoldása, hogy:

$$\begin{bmatrix} O & C & -C \\ -C^T & O & O \\ C^T & O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} > 0.$$

Ebből adódik, hogy  $C(x_1 - x_2) + y > 0$ . Legyen  $x = x_1 - x_2$ , akkor ezzel az  $x$ -szel és  $y$ -nal teljesül Tucker 1. egzisztencia tétele.

27. LEMMA. *Tucker 1. egzisztencia-tételéből következik Tucker 2. egzisztencia-tétele.*

*Bizonyítás.* Ha  $C = O$ , akkor Tucker 2. egzisztencia-tétele triviálisan teljesül.

A  $C \neq O$  esetben pedig alkalmazható a [4] könyv 25. és 26. oldalán levő bizonyítás, amiből adódik az állítás. (Az említett bizonyítás csak Tucker 1. egzisztencia-tételét használja fel.)

28. LEMMA. *Tucker 2. egzisztencia-tételéből következik a Slater tétel.*

*Bizonyítás.* Ha  $A = O$  vagy  $B = O$ , akkor a Slater tétel triviálisan teljesül.

Ezért feltehető, hogy  $A \neq O$  és  $B \neq O$ . Ebben az esetben viszont alkalmazható a [4] könyv 27. és 28. oldalán levő bizonyítás, amiből adódik az állítás. (Az említett bizonyítás csak Tucker 2. egzisztencia-tételét használja fel.)

29. LEMMA. *A Slater tételből következik Mangasarian 4. tétele.*

*Bizonyítás.*  $\{A^T y \geq 0, y > 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \leq 0, y < 0\} = \emptyset$ . Alkalmazva a Slater tételt (pontosabban ennek negált megfogalmazását):

$$\Leftrightarrow \{x_1 + Ax_2 = 0, x_1 \geq 0, x_2 > 0\} \neq \emptyset \quad \text{vagy} \quad \{x_1 + Ax_2 = 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{Ax \leq 0, x > 0\} \neq \emptyset \quad \text{vagy} \quad \{Ax \leq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset.$$

30. LEMMA. *Mangasarian 4. tételéből következik Gale 4. tétele.*

*Bizonyítás.* Az nyilvánvaló, hogy a Gale 4. tételében felírt két rendszernek egyszerre nem lehet megoldása. Tegyük fel ezért pl., hogy

$$(6) \quad \{Bx \leq 0, x \geq 0\} = \emptyset.$$

Ha ekkor  $\{Bx \leq 0, x > 0\} = \emptyset$ , akkor Mangasarian 4. tétele miatt  $\{B^T y \geq 0, y > 0\} \neq \emptyset$ , és így  $\{B^T y \geq 0, y > 0\} \neq \emptyset$  a bizonyítás kész.

Ha ekkor  $\{Bx \leq 0, x > 0\} \neq \emptyset$ , akkor — mivel  $\{Bx \leq 0, x > 0\} = \emptyset$  —  $\{Bx = 0, x > 0\} \neq \emptyset$ . De ez ekvivalens azzal, hogy:  $\{Bx \leq 0, -Bx \leq 0, x > 0\} \neq \emptyset$ . Alkalmazva Mangasarian 4. tételét:

$$\Leftrightarrow \{B^T y_1 - B^T y_2 \geq 0, y_1 > 0, y_2 > 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y \geq 0\} = \emptyset$$

Ebből következik, hogy

$$(7) \quad \{-B^T y \leq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

Másrészt, ha Gale 4. tétele nem teljesülne, akkor:

$$(8) \quad \{-B^T y \leq 0, y > 0\} = \emptyset \text{ lenne}$$

De ekkor Mangasarian 4. tétele miatt (7) és (8) miatt:  $\{-Bx \geq 0, x > 0\} \neq \emptyset$ , vagyis  $\{Bx \leq 0, x > 0\} \neq \emptyset$ . Ez viszont ellentmondás (6)-tal, tehát Gale 4. tétele ebben az esetben is fennáll.

31. LEMMA. *Gale 4. tételéből következik a Stiemke tétel*

*Bizonyítás.*  $\{A^T y = 0, y > 0\} = \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \geq 0, -A^T y \geq 0, y > 0\} = \emptyset$ . Alkalmazva Gale 4. tételét:

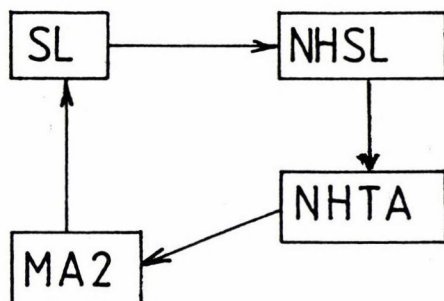
$$\Leftrightarrow \{Ax_1 - Ax_2 \leq 0, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Ax \leq 0\} \neq \emptyset$$

Ezzel az 1. Segédteételt teljes egészében bebizonyítottuk.

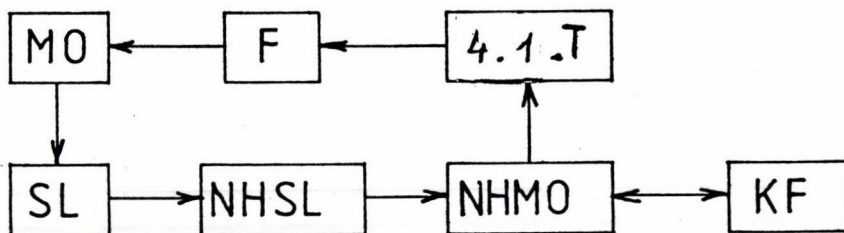
2. MEGJEGYZÉS. A bizonyítások során azokban a lemmákban, amelyek a [4] könyv bizonyításaira ill. az [1] cikkekre hivatkoznak, azért kellett különválasztani a null-mátrixok esetét, mert az ottani bizonyítások eleve felteszik a szóbanforgó mátrixok nem-nulla voltát.

A bizonyítások egyúttal azt is megmutatták, hogy a [4] könyv felhasznált tételei érvényesek null-mátrixok esetére is.





2. ábra



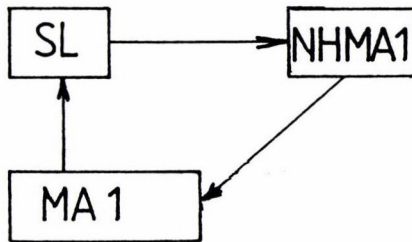
3. ábra

2. SEGÉDTÉTEL. Bármelyik, [6]-ban kapott, nem klasszikus alternatíva- ill. egzisztencia-tételhez van olyan klasszikus alternatíva-tétel, amelyikből ő következik, és van olyan klasszikus alternatíva-tétel is, amelyik belőle következik.

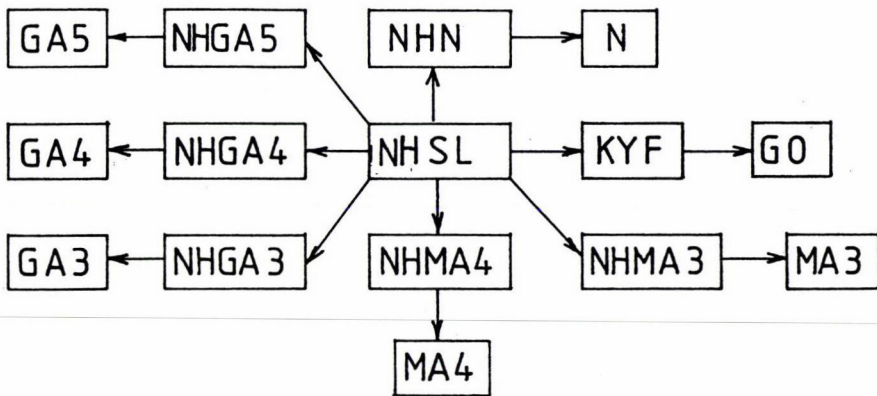
*Bizonyítás.* A bizonyításhoz segítségül ld. a 2.-7. ábrát. A bizonyítás úgy történik, hogy rendre az egyes ábrákon levő következtetéseket igazoljuk. (Tehát azt, hogy az ábrákon levő „A” csúctól „B” csúcsba mutató élnek megfelelő „ha az A tétel igaz, akkor a B tétel is igaz” állítás fennáll).

Mivel a [6]-ban előforduló összes nem klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tétel előfordul az említett ábrák valamelyikén, méghozzá úgy, hogy ahol az ábra-gráfok nem körök, hanem fák, ott gyökként ill. levélként csak klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tétel fordul elő, ezért a 2. segédtételt igazoljuk, ha a fenti ábrákon levő összes következtést belátjuk. (Kivétel az 5. és 6. ábra, ahol a gyökér az inhomogén Slater tétel, amelynek viszont klasszikus alternatíva-tételekkel való ekvivalenciáját pl. a 2. ábra mutatja.)

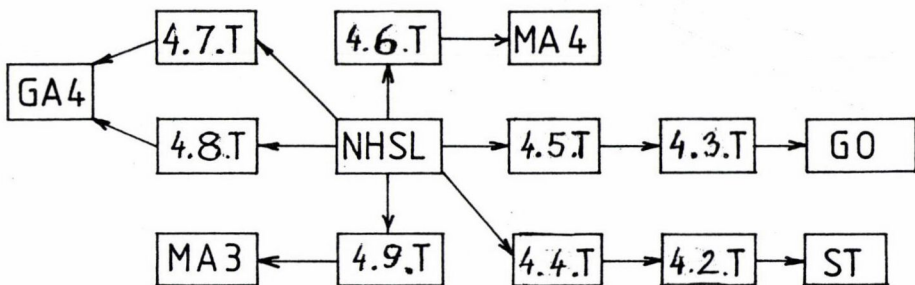
Az alábbiakban ezeknek a következtetéseknek a bizonyítása következik.



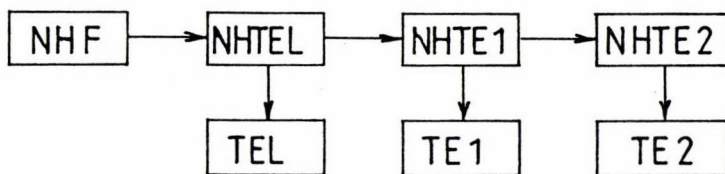
4. ábra



5. ábra



6. ábra



7. ábra

32. LEMMA. A 2. ábra következtetéseinek igazolása.

*Bizonyítás.* Az  $\text{NHSL} \rightarrow \text{NHTA}$  és az  $\text{NHTA} \rightarrow \text{MA2}$  állítások egyszerű speciális esetként adódnak.

$\text{SL} \rightarrow \text{NHSL}$ : Az NHSL tétel bizonyítása alapján. (A bizonyítás csak a homogén Slater tételt használja fel. Ld. [6])

$\text{MA2} \rightarrow \text{SL}$ : Mivel mindkét tétel klasszikus alternatíva-tétel, így az 1. Segéd-tétel szerint ekvivalensek, így  $\text{MA2} \rightarrow \text{SL}$  is teljesül.

33. LEMMA. A 3. ábra következtetéseinek igazolása.

*Bizonyítás.* Az összes következtetés egyszerű speciális esetként adódik, kivéve az alábbiakat:

$\text{SL} \rightarrow \text{NHSL}$ : ld. a 32. lemma bizonyítását.

$\text{NMHO} \rightarrow \text{KF}$  és  $\text{KF} \rightarrow \text{NHMO}$ : [6] 3.15. tétele alapján

$\text{F} \rightarrow \text{MO}$ : mindkét tétel klasszikus alternatíva-tétel.

$\text{MO} \rightarrow \text{SL}$ : mindkét tétel klasszikus alternatíva-tétel.

34. LEMMA. A 4. ábra következtetéseinek igazolása.

*Bizonyítás.* Az  $\text{NHMA1} \rightarrow \text{MA1}$  következtetés egyszerű speciális eset

$\text{SL} \rightarrow \text{NHMA1}$ : ld. [6]-ban a 3.13. tétel bizonyítását.

$\text{MA1} \rightarrow \text{SL}$ : mindkét tétel klasszikus alternatíva-tétel.

35. LEMMA. Az 5. ábra következtetéseinek igazolása.

*Bizonyítás.* Az összes következtetés egyszerű speciális esetként adódik.

36. LEMMA. A 6. ábra következtetéseinek igazolása.

*Bizonyítás.* Az összes következtetés egyszerű speciális esetként adódik (a  $4.7.T. \rightarrow GA4$  következtetéshez megjegyzendő, hogy  $\{Bx \leq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Bx \leq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset$ ), kivéve az alábbi:

$\text{NHSL} \rightarrow 4.7.T.$ : [6] 4.7. tételének bizonyítása alapján, felhasználva, hogy az NHSL. tételből következik az NHTA. tétel és a GA2. tétel.

## 37. LEMMA. A 7. ábra következeéseinek igazolása.

*Bizonyítás.* Az összes következés egyszerű speciális esetként adódik, kivéve az alábbiakat:

NHF  $\rightarrow$  NHTEL: Az NHTEL tétel bizonyítása alapján (ld [6]). (A bizonyítás felhasználja ugyan a GA2 tételt is, de mivel NHF és GA2 is klasszikus alternatíva-tétel, így NHF fennállásából GA2 fennállása is következik, és emiatt NHF-ből következik NHTEL, mivel az NHTEL tétel bizonyítása NHF-en és GA2-n kívül más tételt nem használ fel.

NHTEL  $\rightarrow$  NHTE1: Az NHTE1. tétel bizonyítása alapján. A bizonyítás csak az NHTEL. tételt használja fel (ld [6]).

NHTE1  $\rightarrow$  NHTE2: Az NHTE2. tétel bizonyítása alapján. A bizonyítás csak az NHTE1. tételt használja fel (ld [6]).

Ezáltal a 2. Segéd-tétel bizonyítását befejeztük.

Az 1. és 2. Segéd-tétel együttesen tehát azt bizonyítja, hogy az összes, a [6] cikkben közölt alternatíva- és egzisztencia-tétel, valamint a lineáris programozás dualitási tételei ekvivalensek.

## IRODALOM

- [1] ANTOSIEWICZ, H.A., „A Theorem on Alternatives for Pairs of Matrices”, *Pacific J. of Math.* **5** (1955), 641–642.
- [2] FOCKE, J., „Strenge lineare Ungleichungen bezüglich Kegelhalbordnungen”, *Mathematische Operationsforschung und Statistik* **6** (1975), 881–900.
- [3] GALE, D., *The theory of linear economic models*, McGraw-Hill Co., New York (1960).
- [4] MANGASARIAN, O.L., *Nonlinear programming*, McGraw-Hill, New York (1969).
- [5] PRÉKOPA, A., *Lineáris programozás*, Bolyai Társulat, Budapest (1968).
- [6] SZILÁGYI, P., „Inhomogén lineáris alternatíva-tételek”, *Alkalmazott Matematikai Lapok* **19** (1998), 75–89.

(Beérkezett: 1997. március 18.)

SZILÁGYI PÉTER  
YBL MIKLÓS FŐISKOLA  
BUDAPEST, THÖKÖLY ÚT 74.

## EQUIVALENCE OF THE LINEAR ALTERNATIVE, EXISTENCE AND DUALITY THEOREMS

We prove in the paper that the classical linear alternative and existence theorems, their nonhomogeneous versions and duality theorems of linear programming are all equivalent.

# INHOMOGÉN LINEÁRIS ALTERNATÍVA-TÉTELEK

SZILÁGYI PÉTER

Budapest

Inhomogén lineáris egyenlőtlenségrendszerek megoldhatóságára kapunk közös alakú alternatíva-tételeket, általánosítva a klasszikus alternatíva-tételeket. Segítségükkel az inhomogén Farkas tétel és a Kuhn-Fourier tétel egyszerű bizonyításait is nyerjük. Speciálisan, egyenlőtlenségrendszerek pozitív, szemipozitív ill. nemnegatív megoldásainak létezésére adódnak szükséges és elégséges feltételek.

## 1. Bevezetés

A matematikai programozás elméletében, elsősorban az egyes optimalitási feltételekkel kapcsolatosan fontos szerepet játszanak a különböző alternatíva-tételek, közülük is elsősorban a lineáris alternatíva-tételek. Jóllehet, ezek közül több a legszélesebb körben ismert és alkalmazott (pl. a homogén illetve az inhomogén Farkas tétel, a Gordan tétel vagy a Motzkin tétel), véges dimenziós terekben *elemi algebrai eszközökkel* történő, *általános tárgyalásukra, közös formulaként* való előállításukra eddig még nem került sor. Ugyanakkor folyamatosan nagy számú alternatíva-tételt publikálnak a különféle folyóiratokban és könyvekben, ezek azonban túl általánosak (általában rendező kúpot vagy kúpokat használnak, többnyire általános terekben) (ld. pl. [2]), és ha belőlük kiindulva szeretnénk egy adott feladathoz egy egyszerű alternatíva-tételt elemi alakban megkapni, azt legtöbbször csak elég nehézkesen, hosszadalmas úton érhetjük el, nemegyszer komoly tudást igénylő tételeket alkalmazva.

Cikkünk törekvése tehát az, hogy 1) explicit alakban 2) elemi eszközökkel levezetve 3) egységes rendszerben, közös alakú formulákkal adja meg a különböző alakú *inhomogén* egyenlőtlenség-rendszerekre vonatkozó alternatíva-tételeket. Ennek kapcsán jól megjegyezhető generáló módszert kapunk az alternatíva-tételek előállítására, és megadunk két általános alternatíva-tételt, melyből az összes többi alternatíva-tétel speciális esetként könnyen megkapható.

A cikkben nemcsak az alternatíva-, hanem az ún. egzisztencia-tételeket is általánosíthatjuk az inhomogén esetre. Külön is kiemeljük azokat a fontos speciális eseteket, amelyek egy egyenlőtlenségrendszer ill. egyenletrendszer pozitív ill. nemnegatív megoldásainak létezésére adnak szükséges és elégséges feltételeket.

Megmutatjuk még az ismert Kuhn-Fourier tétel ([5]) és a Motzkin tétel azonosságát, a Kuhn-Fourier tételre az [5]-beli kétoldalas bonyolult bizonyításnál jóval egyszerűbb, közvetlen bizonyítást adva. Emellett az inhomogén Farkas tételnek is egy új bizonyítását nyerjük.

A cikk szerkezete a következő. A 2. fejezetben a klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tételeket ismertetjük, a 3. fejezetben megadjuk ezek inhomogén általánosításait, a 4. fejezet

tárgyalja a kapott formulák gyakorlatban előforduló, már említett fontos speciális eseteit, végül az 5. fejezetben tovább általánosítjuk a kapott eredményeket. A függelékben a Kuhn-Fourier tételt mondjuk ki, olyan formában, ahogyan az az [5] könyvben szerepel.

Az alábbiakban néhány, a cikkben szereplő jelölést vezetünk be. A latin nagybetűk: mátrixokat; a latin kisbetűk vektorokat jelölnek. Pl.  $B \rightarrow D$ ,  $b \rightarrow 0$  valamely képletre való hivatkozásban azt jelenti, hogy a szóbanforgó képletben szereplő  $B$  ill.  $b$  betűt  $D$ -vel ill.  $0$ -val kell helyettesíteni. Latin kisbetűk egy- vagy több alsó indexszel ill. egy vagy több felső indexszel valamilyen dimenziós vektort jelölnek.  $E$  (megfelelő dimenziós) egységmátrixot,  $e_i$  (megfelelő dimenziós)  $i$ . egységvektort jelöl;  $x > 0$ ,  $x \geq 0$ ,  $x \leq 0$  rendre pozitív, nemnegatív ill. szemipozitív (azaz  $x \geq 0$ , de  $x \neq 0$ ) vektort jelent. Hasonlóan értelmezendő  $x < 0$ ,  $x \leq 0$ ,  $x \leq 0$ ,  $a > b$ ,  $a \geq b$ ,  $a \geq b$ ,  $a < b$ ,  $a \leq b$ ,  $a \leq b$ . Végül,  $(x)_i$  az  $x$  vektor  $i$ . komponensét jelöli; és pl.  $\{Ax < a\}$  az  $\{x \in \mathbb{R}^n : Ax < a\}$  rövid jelölése.

## 2. Klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tételek

Ebben a részben a ma már klasszikusnak nevezhető alternatíva- és egzisztencia-tételeket ismertetjük, nevezetesen azokat, amelyek Mangasarian 1969-ben kiadott nevezetes könyvében [3] megtalálhatók. Az 1969 előtt publikált lineáris alternatíva- és egzisztencia-tételekről a mai napig is ebben a könyvben található a legjobb összefoglalás. (Megjegyezzük, hogy Mangasarian mindenhol felteszi az alábbiakban  $A$ -val és  $B$ -vel jelölendő mátrixokról — azaz az  $Ax < 0$  és a  $Bx \leq 0$  egyenlőtlenségrendszerek mátrixairól — hogy zérusmátrixról különbözőek. Ez azonban felesleges feltétel, hiszen  $A = O$  vagy  $B = O$  esetén az ott közölt alternatíva-tételek triviálisan teljesülnek. ennek megfelelően, a bizonyításokban már az  $A \neq O$  ill.  $B \neq O$  feltétel nélkül kimondott [3]-beli tételeket használjuk fel.) A klasszikus tételek többnyire *homogén* lineáris alternatíva- és egzisztencia-tételek, bár van közöttük inhomogén is (mint pl. az inhomogén Farkas tétel). (Mindazonáltal, azért egy-két, klasszikusnak nevezhető lineáris alternatíva-tétel kimaradt a [3] könyvből, így pl. Ky Fan tétele (ld. pl. [1]) vagy a [9]-ben közölt néhány alternatíva-tétel.) A továbbiakban klasszikus alternatíva- ill. egzisztencia-tételen a [3]-ban közölt alternatíva- ill. egzisztencia-tételeket értjük. (A tételek bizonyítása e könyvben megtalálható.)

Az alábbiakban a tételek mellett azok rövidítése szerepel.

### Klasszikus alternatíva-tételek.

Ebben a részben — bizonyítás nélkül — egymásután felsoroljuk a klasszikus alternatíva-tételeket.

#### 2.1. TÉTEL. (GORDAN TÉTEL) (GO)

$$\{Ax < 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

#### 2.2. TÉTEL. (STIEMKE TÉTEL) (ST)

$$\{Bx \leq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y = 0, y > 0\} = \emptyset$$

2.3. TÉTEL. (FARKAS TÉTEL) (F)

$$\{a^T x > 0, Cx \leq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y = a, y \geq 0\} = \emptyset$$

2.4. TÉTEL. (MOTZKIN TÉTEL) (MO)

$$\{Ax < 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

2.5. TÉTEL. (TUCKER ALTERNATÍVA-TÉTEL) (TA)

$$\{Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

2.6. TÉTEL. (SLATER TÉTEL) (SL)

$$\begin{aligned} \{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset &\Leftrightarrow \\ \{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} &= \emptyset \\ \Leftrightarrow &\text{és} \\ \{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} &= \emptyset \end{aligned}$$

2.7. TÉTEL. (MANGASARIAN 1. TÉTELE) (MA1)

$$\{Ax < 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset \text{ vagy } \{Ax \leq 0, Bx \leq 0, Cx \leq 0, Dx = 0\} \neq \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

2.8. TÉTEL. (GALE 1. TÉTELE VAGY FREDHOLM TÉTEL) (GA1)

$$\{Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{D^T y = 0, d^T y > 0\} = \emptyset$$

2.9. TÉTEL. (GALE 2. TÉTELE) (GA2)

$$\{Cx \leq c\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y = 0, c^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

2.10. TÉTEL. (INHOMOGÉN FARKAS TÉTEL) (NHF)

$$\begin{aligned} \{a^T x > \alpha, Cx \leq c\} \neq \emptyset &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{C^T y = a, c^T y \leq \alpha, y \geq 0\} = \emptyset &\text{ és } \{C^T y = 0, c^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \end{aligned}$$

2.11. TÉTEL. (MANGASARIAN 2. TÉTELE) (MA2)

$$\{Bx \leq b\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y = 0, b^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{B^T y = 0, b^T y \leq 0, y > 0\} = \emptyset$$

2.12. TÉTEL. (GALE 3. TÉTELE) (GA3)

$$\{Cx \leq c, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y \geq 0, c^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

2.13. TÉTEL. (GALE 4. TÉTELE) (GA4)

$$\{Bx \leq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y \geq 0, y > 0\} = \emptyset$$

2.14. TÉTEL. (GALE 5. TÉTELE) (GA5)

$$\{Ax < 0, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

2.15. TÉTEL. (MANGASARIAN 3. TÉTELE) (MA3)

$$\{Ax < 0, x > 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

2.16. TÉTEL. (MANGASARIAN 4. TÉTELE) (MA4)

$$\{Ax \leq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset \text{ vagy } \{Ax \leq 0, x > 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \geq 0, y > 0\} = \emptyset$$

2.17. TÉTEL. (NEUMANN TÉTEL) (N)

$$\{Cx \leq 0, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

#### Klasszikus egzisztencia-tételek.

Az alábbi három egzisztencia-tételt nevezzük klasszikus egzisztencia-tételnek.

2.18. TÉTEL. (TUCKER EGZISZTENCIA-LEMMÁJA) (ld. [4]-ben) (TEL)

Legyen  $C$  ferdén szimmetrikus mátrix (azaz  $C^T = -C$ ). Akkor a  $\{Cx \geq 0, x \geq 0\}$  rendszernek van olyan  $x_0$  megoldása, melyre:  $Cx_0 + x_0 > 0$ .

2.19. TÉTEL. (TUCKER 1. EGZISZTENCIA-TÉTELE) (TE1)

A  $\{Cx \geq 0\}$  és a  $\{C^T y = 0, y \geq 0\}$  rendszereknek van olyan  $x_0$  ill.  $y_0$  megoldása, melyre:  $Cx_0 + y_0 > 0$ .

2.20. TÉTEL. (TUCKER 2. EGZISZTENCIA-TÉTELE) (TE2)

A  $\{Cx \geq 0, Dx = 0\}$  és a  $\{C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_3 \geq 0\}$  rendszereknek vannak olyan megoldásai, melyekre:  $Cx + y_3 > 0$



### 3. A klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tételek általánosítása inhomogén rendszerekre

Mint azt már az előző fejezet bevezetőjében említettük, a klasszikus alternatíva- és egzisztencia-tételek — kevés kivételtől eltekintve — homogén alternatíva- és egzisztencia-tételek. Ezek azonban viszonylag könnyen általánosíthatók inhomogén rendszerekre is, és — ami fontosabb ennél — inhomogén lineáris rendszerek megoldhatóságára olyan általános formulák adhatók, amelyekből az összes korábbi eredmény speciális esetként közvetlenül adódik.

Megjegyzendő, hogy az [5] könyv (1.1.9) tétele egy szükséges és elégséges feltételt ad a  $\{<, \leq, =\}$  relációkat tartalmazó (homogén és inhomogén) rendszerek konzisztenciájára. Az [5]-beli megfogalmazás azonban nehezen kezelhető, formailag nem alternatíva-tétel és közvetlenül nem ad formulát. Az alábbiakban — többek között — ezeket a kellemetlenségeket is kiküszöböljük. (Ez az ún. Kuhn-Fourier tétel. Részletesen ld. a Függelékben.)

#### A homogén egzisztencia-tételek inhomogén általánosítása.

Ebben a fejezetben a 2. fejezetben felsorolt klasszikus egzisztencia-tételeket általánosítjuk az inhomogén (pontosabban a nem feltétlenül homogén) esetre.

#### 3.1. TÉTEL. (INHOMOGÉN TUCKER EGZISZTENCIA-LEMMA) (NHTEL)

Legyen  $C$  egy ferdén szimmetrikus mátrix, és tegyük fel, hogy a  $\{Cx \geq c_1, x \geq c_2\}$  rendszer konzisztens. Akkor e rendszernek van olyan  $x_0$  megoldása, melyre:  $Cx_0 + x_0 > c_1 + c_2$ .

*Bizonyítás.* Az inhomogén Farkas tétel miatt minden  $i = 1, 2, \dots, n$ -re: vagy

$$(3.1) \quad \{-Cx^i \leq -c_1, -Ex^i \leq -c_2, e_i^T x^i > e_i^T c_2\} \neq \emptyset$$

vagy a (3.2) és a (3.3) rendszerek legalább egyike konzisztens:

$$(3.2) \quad \{Cy_1^i - Ey_2^i = e_i, -c_1^T y_1^i - c_2^T y_2^i \leq e_i^T c_2, y_1^i \geq 0, y_2^i \geq 0\}$$

$$(3.3) \quad \{Cy_1^i - Ey_2^i = 0, -c_1^T y_1^i - c_2^T y_2^i < 0, y_1^i \geq 0, y_2^i \geq 0\}$$

Ha (3.1)-nek van  $\bar{x}^i$  megoldása, akkor:  $C\bar{x}^i \geq c_1, \bar{x}^i \geq c_2$  és  $(\bar{x}^i)_i > (c_2)_i$

Ha (3.2)-nek van  $\bar{y}^i$  megoldása, akkor:  $C\bar{y}_1^i \geq e_i, \bar{y}_1^i \geq 0$  és a  $\{Cx \geq c_1, x \geq c_2\}$  rendszer bármely  $z$  megoldására az  $\bar{x}^i = z + \bar{y}_1^i$  vektor megoldása a  $\{Cx \geq c_1, x \geq c_2\}$  rendszernek és  $(C\bar{x}^i)_i > (c_1)_i$ .

Ha (3.3)-nak volna  $\bar{y}^i$  megoldása, akkor az ellentmondana Gale 2. tétele szerint  $\{Cx \geq c_1, x \geq c_2\} \neq \emptyset$ -nek. Tehát, (3.3) mindig inkonzisztens.

Ezért minden  $i = 1, 2, \dots, n$ -re a  $\{Cx \geq c_1, x \geq c_2\}$  rendszernek van olyan  $\bar{x}^i$  megoldása, melyre  $(C\bar{x}^i + \bar{x}^i)_i > (c_1 + c_2)_i$ .

Képezve az  $\bar{x} = \left( \sum_{i=1}^n \bar{x}^i \right) / n$  vektort, az a  $\{Cx \geq c_1, x \geq c_2\}$  rendszer olyan megoldása lesz, melyre:  $C\bar{x} + \bar{x} > c_1 + c_2$

### 3.2. TÉTEL (TUCKER 1. EGZISZTENCIA-TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHTE1)

Legyen  $\{Cx \geq c_1\} \neq \emptyset$  és  $\{C^T y = d, y \geq c_2\} \neq \emptyset$ . Akkor ezen rendszereknek van olyan  $\bar{x}$  és  $\bar{y}$  megoldása, melyre:  $C\bar{x} + \bar{y} > c_1 + c_2$ .

*Bizonyítás.* Írjuk át a fenti rendszereket ekvivalens mátrix formába:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \emptyset & C & -C \\ -C^T & \emptyset & \emptyset \\ C^T & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_1 \\ -d \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

A 3.1. Tétel alapján e rendszernek van olyan  $(\bar{y}^T, \bar{x}_1^T, \bar{x}_2^T)$  megoldása, melyre:

$$\begin{pmatrix} \emptyset & C & -C \\ -C^T & \emptyset & \emptyset \\ C^T & \emptyset & \emptyset \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} > \begin{pmatrix} c_1 + c_2 \\ -d \\ d \end{pmatrix}$$

Ebből  $C\bar{x}_1 - C\bar{x}_2 + \bar{y} > c_1 + c_2$  adódik, és ha  $\bar{x} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2$ , akkor  $C\bar{x} + \bar{y} > c_1 + c_2$

3.1. MEGJEGYZÉS. A tétel egy speciális esete ( $c_2 = 0$ ) azonnal adódik a kiegészítő eltérések szigorú tételéből (ld. [4]). Ha t.i. tekintjük a  $\{\min d^T x : Cx \geq c_1\}$  primál feladatot, akkor ennek duál párja  $\{\max c_1^T y : C^T y = d, y \geq 0\}$ . Ezen feladatpárnak vannak olyan  $x_0, y_0$  optimális megoldásai, melyekre:  $Cx_0 + y_0 > c_1$ .

### 3.3. TÉTEL. (TUCKER 2. EGZISZTENCIA-TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHTE2)

Legyen  $\{Cx \geq c_1, Dx = d_1\} \neq \emptyset$  és  $\{C^T y_3 + D^T y_4 = d_2, y_3 \geq c_2\} \neq \emptyset$ . Akkor ezen rendszereknek van olyan  $\bar{x}$  ill.  $\bar{y}$  megoldása, melyre:

$$C\bar{x} + \bar{y}_3 > c_1 + c_2.$$

*Bizonyítás.* Írjuk át az első- ill. a második rendszert a következő ekvivalens alakba:  $\{Cx \geq c_1, Dx \geq d_1, -Dx \geq -d_1\}$  illetve  $\{C^T y_3 + D^T y'_4 - D^T y''_4 = d_2, y_3 \geq c_2, y'_4 \geq 0, y''_4 \geq 0\}$ , majd alkalmazzuk a 3.2. Tételt. Rövid számolással kapjuk a tétel állítását.

#### A homogén alternatíva-tételek inhomogén általánosítása.

Ebben a fejezetben általánosítjuk az összes klasszikus alternatíva-tételt, méghozzá úgy, hogy a két legáltalánosabb homogén alternatíva-tételt, a Slater tételt ill. Mangasarian 1. tételét általánosítjuk, és ezekből speciális esetként vezetjük le a többi klasszikus alternatíva-tétel inhomogén általánosítását. Megmutatjuk továbbá, hogy az inhomogén Motzkin tétel és az ismert Kuhn-Fourier tétel ugyanazt mondja ki, csak az előbbi sokkal egyszerűbb alakban van megfogalmazva.

## 3.4. TÉTEL. (SLATER TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHSL)

$$(3.4) \quad \{Ax < a, Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \\ &\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \\ &\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \end{aligned}$$

*Bizonyítás.*  $\{Ax < a, Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\} = \emptyset \Leftrightarrow \{-t < 0, Ax - at < 0, Bx - bt \leq 0, Cx - ct \leq 0, Dx - dt = 0\} = \emptyset$ . A homogén Slater tétel alapján ez utóbbi ekvivalens azzal, hogy a

$$(3.6) \quad \{A^T y_{12} + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, y_{11} + a^T y_{12} + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0\}$$

rendszernek van vagy  $(y_{11}, y_{12}^T) \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$  vagy  $(y_{11}, y_{12}^T) \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0$  megoldása. Itt  $y_{11} \in \mathbb{R}^1$ . Véve  $y_{11} = 0-t$  ill.  $y_{11} > 0-t$ , (3.4.) inkonzisztens akkor és csak akkor, ha (3.6)-nak van olyan megoldása, melyre:

első eset:  $y_{11} = 0, y_{12} \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$  vagy

második eset:  $y_{11} > 0, y_{12} \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$  vagy

harmadik eset:  $y_{11} = 0, y_{12} \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0$  vagy

negyedik eset:  $y_{11} > 0, y_{12} \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0$ .

Mivel a 2. eset következik a 4. esetből, a 4. esetet elhagyhatjuk. Másrészt, (3.5) első rendszerének konzisztenciája ekvivalens a 2. esettel, második rendszerének konzisztenciája az 1. esettel, végül harmadik rendszerének konzisztenciája a 3. esettel.

3.2. MEGJEGYZÉS. Az előző tételből Gale 2. tétele alapján látható, hogy ha az  $\{Ax \leq a, Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\}$  rendszer konzisztens, akkor az inhomogén Slater tételt a homogén Slater tételből formailag úgy nyerjük, úgy, hogy a duál rendszerekhez hozzávesszük az  $a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0$  egyenletet.

3.1. KÖVETKEZMÉNY. (MOTZKIN TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHMO)

$$(3.7) \quad \begin{aligned} &\{Ax < a, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{aligned} &\{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \\ &\text{és} \\ &\{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \end{aligned} \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* A 3.4. tételből adódik  $B \rightarrow 0, b \rightarrow \geq 0$  tetsz. esetén.

### 3.2. KÖVETKEZMÉNY. (TUCKER ALTERNATÍVA-TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHTA)

$$\{Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} &\{B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \\ &\text{és} \\ &\{B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset \end{aligned}$$

*Bizonyítás.* A 3.4. tételből adódik  $A \rightarrow O, a \rightarrow > 0$  tetsz. esetén.

3.3 MEGJEGYZÉS. Mivel az inhomogén Farkas tétel az inhomogén Motzkin tétel speciális esete, ezért az inhomogén Farkas tételnek egy új bizonyítását is nyerjük.

3.4. MEGJEGYZÉS. Az [5]-ben leírt Kuhn-Fourier tétel tulajdonképpen nem más, mint az inhomogén Motzkin tétel, mint azt az alábbi tételben belátjuk. Míg azonban az előbbi tétel [5]-beli bizonyítása igen bonyolult (ld. ott), az utóbbi könnyen adódik és könnyebben kezelhető formulát is ad. Könnyű belátni, hogy a Kuhn-Fourier tételben kimondott feltétel, melyről a tétel azt állítja, hogy az  $\{Ax < a, Cx \leq c, Dx = d\}$  rendszer konzisztenciájával ekvivalens, az ott leírt definícióknak megfelelően egyszerűen átírható az alábbi, „KF-feltétel”-rel jelölt alakba. (A Kuhn-Fourier tétel kimondását ld. a Függelékben.)

3.5. TÉTEL. A (3.7)-ben szereplő mindkét rendszer inkonzisztens akkor és csak akkor, ha teljesül a következő feltétel:

KF-feltétel:

Az  $\{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0\}$  rendszer a következő tulajdonságú:

- (I) A rendszer minden  $y_1 \geq 0, y_3 \geq 0$  megoldására fennáll, hogy:  $a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 > 0$ .
- (II) A rendszer minden  $y_1 = 0, y_3 \geq 0$  megoldására fennáll, hogy:  $c^T y_3 + d^T y_4 \geq 0$ .
- (III) A rendszer minden  $y_1 = 0, y_3 = 0, y_4 \neq 0$  megoldására fennáll, hogy:  $d^T y_4 > 0$ .

3.5. MEGJEGYZÉS. Az inhomogén Motzkin tétel és az [5]-beli Kuhn-Fourier tétel alapján a 3.5. tétel helyessége már adódik.

Az alábbiakban egy közvetlen bizonyítást adunk a 3.5. tételre. Ezáltal egyúttal a Kuhn-Fourier tételnek egy, az [5] könyvbelinél jóval egyszerűbb bizonyítását adjuk.

*Bizonyítás.*

- 1/ Tegyük fel, hogy a KF-feltétel teljesül. Ha  $y_1 = 0$ , akkor ha  $y_3 \geq 0$ , akkor (II) alapján nincs olyan  $y_4$ , melyre  $c^T y_3 + d^T y_4 < 0$  lenne: ha  $y_3 = 0$ , akkor (III) alapján nincs olyan  $y_4$  melyre  $d^T y_4 < 0$  lenne. Ha  $y_1 \geq 0$ , akkor (I) alapján nincs olyan  $y_3 \geq 0$ , melyre  $a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 \leq 0$  lenne, tehát nincs olyan  $y_3 \geq 0$  sem, melyre  $a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0$  lenne. Ennélfogva (3.7) mindkét rendszere inkonzisztens.

- 2/ Tegyük most fel, hogy (3.7) mindkét rendszere inkonzisztens. Ha  $y_1 = 0$  és  $y_3 = 0$ , akkor (3.7) első rendszerének inkonzisztenciája miatt kapjuk (III)-at. Ha  $y_1 = 0$  és  $y_3 \geq 0$ , akkor (3.7) első rendszerének inkonzisztenciája miatt kapjuk (II)-t. Végül, ha  $y_1 \geq 0$  és  $y_3 \geq 0$ , akkor mindkét (3.7)-beli rendszer inkonzisztenciáját felhasználva nyerjük (I)-et.

3.6. MEGJEGYZÉS. A KF-feltételben: a (III) feltétel azt fejezi ki, hogy  $\{Dx = d\} \neq \emptyset$  a (II) azt, hogy ha  $\{Dx = d\} \neq \emptyset$ , akkor  $\{Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset$ ; az (I) azt, hogy ha  $\{Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset$ , akkor  $\{Ax < a, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset$ .

Könnnyen látható, hogy az alábbi tételek - vagyis a [3]-beli homogén alternatíva-tételek inhomogén általánosításai - az inhomogén Slater tétel speciális eseteiként állnak elő.

3.6. TÉTEL. (GORDAN TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA VAGY KY FAN TÉTEL) (ld. [1]) (KYF)

$$\{Ax < a\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y = 0, a^T y \leq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

3.7. TÉTEL. (GALE 3. TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHGA3)

$$\{Cx \leq c_1, x \geq c_2\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{(c_1 - Cc_2)^T y < 0, C^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

3.8. TÉTEL. (GALE 4. TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHGA4)

$$\{Bx \leq b, x \geq c\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(b - Bc)^T y < 0, B^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{(b - Bc)^T y \leq 0, B^T y \geq 0, y > 0\} = \emptyset$$

3.9. TÉTEL. (GALE 5. TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHGA5)

$$\{Ax < a, x \geq c\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{(a - Ac)^T y \leq 0, A^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

3.10. TÉTEL. (MANGASARIAN 3. TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHMA3)

$$\{Ax < a, x > c\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{(a - Ac)^T y \leq 0, A^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

3.11. TÉTEL. (MANGASARIAN 4. TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHMA4)

$$\{Bx \geq b, x > a\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\{(b - Ba)^T y > 0, B^T y \leq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow \{(b - Ba)^T y = 0, B^T y \leq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

$$\text{és} \\ \{(b - Ba)^T y = 0, B^T y \leq 0, y > 0\} = \emptyset$$

## 3.12. TÉTEL. (NEUMANN TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHN)

$$\{Ax < a, x \geq c\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{(a - Ac)^T y \leq 0, A^T y \geq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

Most Magasarian 1. alternatíva-tételének inhomogén általánosítását adjuk meg.

## 3.13. TÉTEL. (MANGASARIAN 1. ALTERNATÍVA-TÉTELÉNEK INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA) (NHMA1)

(3.8)

$$\{Ax < a, Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \text{ vagy } \{Ax \leq a, Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

(3.9)

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

és

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

*Bizonyítás.* Az állítás helyett annak negáltját bizonyítjuk. Az inhomogén Motzkin tétel alapján (3.8) első rendszere inkonzisztens akkor és csak akkor, ha vagy (3.9) első rendszere vagy az alábbi (3.10) rendszer konzisztens.

(3.10)

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\}$$

Az inhomogén Tucker tétel miatt (3.8) második rendszere inkonzisztens akkor és csak akkor, ha vagy (3.9) első rendszere vagy az alábbi (3.11) rendszer konzisztens.

(3.11)

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0, y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\}$$

Ha tehát (3.9) első rendszerének konzisztenciáját  $P$ -vel, a (3.10) rendszerét  $Q$ -val, a (3.11)-ét pedig  $R$ -rel jelöljük, akkor a  $P$ ,  $Q$  és  $R$  közti „ $(P \text{ vagy } Q)$  és  $(P \text{ vagy } R) \equiv P \text{ vagy } (Q \text{ és } R)$ ” azonosság alapján kapjuk, hogy (3.8) inkonzisztens akkor és csak akkor, ha vagy (3.9) első rendszere konzisztens, vagy az  $\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 = 0\}$  rendszernek van olyan megoldása, melyre  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0$  és van olyan megoldása is, melyre  $y_1 \geq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0$  áll fenn. De ez ekvivalens (3.9) konzisztenciájával.

Az előzőek alapján most már látszik a következő tétel:

3.14. TÉTEL. Az összes klasszikus alternatíva-tétel az inhomogén Slater tétel vagy az inhomogén Mangasarian 1. alternatíva-tétel speciális esete.

**Az inhomogén alternatíva-tételek ekvivalens alakjai.**

Az előzőekben láttuk, hogy a Kuhn-Fourier tétel az inhomogén Motzkin tételnek a következő ekvivalens formája:

## 3.15. TÉTEL.

(KF)

$$\{Ax < a, Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_1 = 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 \leq 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

Felmerülhet tehát a kérdés, hogy az alternatíva-tételeknek vannak-e ekvivalens alakjai és ha igen, mik azok. Mint az könnyen látható, a válasz igenlő: egy sor ekvivalens alakjuk van, melyeket a közölt képletekből az  $y \geq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$  vagy  $y = 0$ , illetve az  $y \geq 0 \Leftrightarrow y > 0$  vagy  $(y \geq 0 \text{ és } y \not\geq 0)$  vagy  $y = 0$  átalakításokkal nyerünk.

Az alábbiakban csak néhány példát mutatunk be a legfontosabb ekvivalens alakokra, azok nagy száma miatt az összes ekvivalens formát nem írjuk le. Minden esetben csak a tételek második részét írjuk le.

Az inhomogén Motzkin tétel harmadik ekvivalens alakja:

$$\{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\{A^T y_1 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + c^T y_3 + d^T y_4 \leq 0, y_1 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

Az inhomogén Tucker alternatíva-tétel egy ekvivalens alakja:

$$\{B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\{B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 \leq 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

A Ky Fan tétel ekvivalens alakja:

$$1) \{A^T y = 0, b^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{A^T y = 0, b^T y \leq 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

$$2) \{A^T y = 0, b^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{A^T y = 0, b^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

#### 4. Speciális eset: Egyenlőtlenségrendszerek pozitív, szemipozitív illetve nemnegatív megoldásainak létezése

A lineáris egyenlőtlenségrendszerekkel kapcsolatban sok olyan (elsősorban közgazdasági vagy műszaki) alkalmazás merül fel, ahol a rendszer nemnegatív, szemipozitív vagy pozitív megoldásait keressük. Az alábbiakban ilyen rendszerek konzisztenciájával foglalkozunk.

Az előző részekben kapott inhomogén alternatíva-tételek fontosabb speciális eseteként azonnal adódnak az alábbi alternatíva-tételek.

##### 4.1. TÉTEL. (A FARKAS TÉTEL EGY INHOMOGÉN ÁLTALÁNOSÍTÁSA)

$$\{Cx \leq c, Dx = d\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y_3 + D^T y_4 = 0, c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$$

*Bizonyítás.* Az inhomogén Motzkin tételből azonnal adódik.

4.1. MEGJEGYZÉS. *E tételből a Farkas tétel  $C \rightarrow -E$ ,  $c \rightarrow 0$  megfeleltetéssel adódik.*

A továbbiakban azokat a speciális eseteket tekintjük át, amelyek megadják, hogy egy egyenlőtlenség- ill. egyenletrendszernek mikor van rendre pozitív, szemipozitív ill. nemnegatív megoldása. Vizsgáljuk tehát az  $\{Mx \rho_1 m, x \rho_2 0\}$  rendszer megoldhatóságát. (Itt  $\rho_1 \in \{=, \leq, <\}$ ,  $\rho_2 \in \{>, \geq, \geq\}$ ).

Két esetet már a korábbiakban tárgyaltunk, ezeket most nem írjuk le újra. Ezek  $(\rho_1, \rho_2)$  párral megadva:

$(=, \geq)$  homogén Farkas tétel       $(\leq, \geq)$  Gale 3. tétele.

4.2. TÉTEL.

$$\{Dx = d, x > 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{D^T y \geq 0, d^T y < 0\} = \emptyset \text{ és } \{D^T y \geq 0, d^T y = 0\} = \emptyset$$

4.3. TÉTEL.

$$\{Dx = d, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{D^T y \geq 0, d^T y < 0\} = \emptyset \text{ és } \{D^T y > 0, d^T y = 0\} = \emptyset$$

4.4. TÉTEL.

$$\{Cx \leq c, x > 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y \geq 0, c^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{C^T y \geq 0, c^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

4.5. TÉTEL.

$$\{Cx \leq c, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{C^T y \geq 0, c^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{C^T y > 0, c^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset$$

4.6. TÉTEL.

$$\begin{aligned} \{B^T y \geq 0, b^T y < 0, y \geq 0\} &= \emptyset \\ \{Bx \leq b, x > 0\} \neq \emptyset &\Leftrightarrow \{B^T y \geq 0, b^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset \\ &\text{és} \\ \{B^T y \geq 0, b^T y = 0, y > 0\} &= \emptyset \end{aligned}$$

4.7. TÉTEL. Ha  $b \geq 0$ , akkor:  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y > 0, b^T y = 0, y \geq 0\} = \emptyset$ . Ha nem igaz, hogy  $b \geq 0$ , akkor:  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{B^T y \geq 0, b^T y < 0, y \geq 0\} = \emptyset \text{ és } \{B^T y \geq 0, b^T y = 0, y > 0\} = \emptyset$$

*Bizonyítás.* A következő lemma nyilvánvalóan igaz.



## 4.1. LEMMA.

$$\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \text{ és } \{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$$

1.eset:  $b \geq 0$ .

Ekkor  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ , hiszen  $x = 0$  megoldása. Ennélfogva  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ . Alkalmazzuk az inhomogén Tucker alternatíva-tételt, kapjuk:

$$\begin{aligned} & \{B^T y_3 = y_2, b^T y_3 < 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \text{és} \\ & \{B^T y_3 = y_2, b^T y_3 = 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = 0 \end{aligned}$$

De Gale 2. tétele miatt az első rendszer inkonzisztens akkor és csak akkor, ha  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ . Ez viszont  $b \geq 0$  miatt teljesül. Tehát  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{B^T y_3 = y_2, b^T y_3 = 0, y_2 > 0, y_3 \geq 0\} = \emptyset$ . Itt  $y_3 \rightarrow y$  megfeleltetéssel adódik az állítás.

2. eset: nem igaz, hogy  $b \geq 0$ .

Mivel ekkor az  $x = 0$  nem megoldása a  $\{Bx \leq b, x \geq 0\}$  rendszernek, így  $\{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset$ . Alkalmazzuk tehát a 4.8. tételt, így megkapjuk a tétel állítását.

## 4.8. TÉTEL.

$$\begin{aligned} & \{Bx \leq b, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \{B^T y \geq 0, b^T y < 0, y \geq 0\} = 0 \text{ és } \{B^T y \geq 0, b^T y = 0, y > 0\} = \emptyset \end{aligned}$$

## 4.9. TÉTEL.

$$\begin{aligned} & \{Ax < a, x > 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{Ax < a, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \{Ax < a, x \geq 0\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \{A^T y \geq 0, a^T y \leq 0, y \geq 0\} = 0 \end{aligned}$$

**Függelék: a Kuhn-Fourier tétel** (ld. [5] 7-11. és 15-17. oldalát)

Tekintsük az  $\{Ax < a, Bx \leq b, Cx = c\}$  lineáris egyenlőtlenségrendszert.  
(F.1)

1. *Definíció.* Az  $(y_1^T, y_2^T, y_3^T)$  vektort (ahol  $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$ ) és a segítségével képzett  $d^T x \leq \delta$  egyenlőtlenséget/egyenletet az (F.1) rendszer megengedett lineáris kombinációjának nevezzük, ha  $y_1^T A + y_2^T B + y_3^T C = d^T$  és  $y_1^T a + y_2^T b + y_3^T c = \delta$ , és  $\rho$ -t ebből az  $(y_1^T, y_2^T, y_3^T)$  vektorból úgy képezzük, hogy  $\rho$  legyen „<”, ha  $y_1 \neq 0$  (azaz  $y_1 \geq 0$ );  $\rho$  legyen „ $\leq$ ”, ha  $y_1 = 0$ , de  $y_2 \neq 0$  (azaz  $y_2 \geq 0$ ); és  $\rho$  legyen „=”, ha  $y_1 = 0$  és  $y_2 = 0$ . (Tehát a  $(d^T, \delta)$  vektor az (F.1) rendszer egyenlőtlenségei/egyenletei normálvektorainak (megfelelő nemnegativitással vett) lineáris kombinációja.)

Nyilván minden megengedett lineáris kombináció következménye az (F.1) rendszernek.

2. *Definíció.* Azt mondjuk, hogy az (F.1)rendszer megengedetten lineáris összefüggő, ha van olyan megengedett lineáris kombinációja, melyben és  $d = 0$ , tehát  $0^T x \rho \delta$  adódik (F.2).

Világos, hogy (F.2) vagy minden  $x$ -re igaz, vagy minden  $x$ -re hamis.

F.1. TÉTEL. (Kuhn-Fourier tétel) Az (F.1) lineáris egyenlőtlenségrendszer konzisztens akkor és csak akkor, ha bármely megengedett lineáris kombinációja, mellyel az (F.1) rendszer megengedetten lineárisan összefüggő, olyan (F.2) relációt eredményez, mely minden  $x$ -re igaz. Speciálisan, ha nem igaz, hogy a rendszer megengedetten lineárisan összefüggő, akkor konzisztens.

F.1. MEGJEGYZÉS. Vegyük észre, hogy az összes inhomogén alternatíva-tételnek közös az alakja. (Így a Kuhn-Fourier tétellel azonos inhomogén Motzkin tételnek is.) Ugyanis az előállított formulákból látszik, hogy minden formula olyan alakú, hogy a duális felírásában első rendszerként mindig az

$$\{A^T y_1 + B^T y_2 + C^T y_3 + D^T y_4 = 0, a^T y_1 + b^T y_2 + c^T y_3 + d^T y_4 < 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0\}$$

szerepel, és a duális megfogalmazás elsőként e rendszer inkonzisztenciáját (azaz az  $\{Ax \leq a, Bx \leq b, Cx \leq c, Dx = d\}$  rendszer konzisztenciáját) mondja ki.

#### IRODALOM

- [1] KY FAN, „On Systems of Linear Inequalities”, *Linear Inequalities and Related Systems*, Eds. H.W.Kuhn, A.W. Tucker, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1956.
- [2] LEHMANN, R., OETTLI, W., „The Theorem of the Alternative, the Key-Theorem and the Vector-Maximum Problem”, *Mathematical Programming* 8 (1975), 332–344.
- [3] MANGASARIAN, O., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill Co., New York, 1969.
- [4] PREKOPA, A., *Lineáris programozás*, Bolyai Társulat, Budapest, 1968.
- [5] STOER, J., WITZGALL, CH., *Convexity and Optimization in Finite Dimensions I*, Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [6] SZILÁGYI, P., „Linear Theorems of the Alternative in  $R^n$ ”, előadás a 9th International Conference on Mathematical Programming konferencián, Visegrád, 1988.
- [7] SZILÁGYI, P., „Consistency of Linear Systems”, *Fourth Conference of Program Designers*, Ed. A. Iványi, ELTE, Budapest, 1988, 147–152.
- [8] SZILÁGYI, P., *Alternatíva-tételek és constraint qualification-ök*, doktori disszertáció, ELTE, Budapest, 1989.
- [9] TUCKER, W., *Dual Systems of Homogeneous Linear Relations*, ld. [1].

(Beérkezett: 1997. március 18.)

SZILÁGYI PÉTER  
YBL MIKLÓS FŐISKOLA  
BUDAPEST, THÖKÖLY ÚT 74.

## NONHOMOGENEOUS LINEAR THEOREMS OF THE ALTERNATIVE

P. SZILÁGYI

Generalizing the classical theorems, theorems of the alternative of new, common forms are obtained for the consistence of nonhomogeneous linear inequality systems. With their help simple proofs for the nonhomogeneous Farkas theorem as well as for the Kuhn-Fourier theorem are described. As particular cases, we get necessary and sufficient conditions for the consistence of linear inequality systems having positivity, semipositivity or nonnegativity requirements for the variables.



# AZ ÜVEGSZÁL ANYAGHIBÁINAK VALÓSZÍNŰSÉGI MODELLEZÉSE

FÁBIÁN CSABA\*

Budapest

Adott hosszúságú üvegszálban véletlenszerűen anyaghibák lehetnek. A hibátlan száldarabok számát és hosszait jellemezzük a dolgozatban.

## 1. Bevezetés. Az üvegszál-gyártás vázlatos leírása

A távközlési célra szolgáló üvegszál gyártása úgy történik, hogy szilárd üvegrúd (preform) egyik végét hevítik és a képlékeny anyagot vékonyra kihúzzák. Azonos méretű rudak vannak, és mindegyikből azonos hosszú üvegszál húzható.

A kihúzott üvegszálban anyaghibák lehetnek. Az anyaghiba lehet folytonossági hiány, vagy az előírtnál gyengébb fényáteresztő képesség. A tapasztalat szerint egyforma hosszú szakaszok azonos valószínűséggel tartalmaznak anyaghibát. Még hozzá diszjunkt szálszakaszok esetén egymástól függetlenek azok az események, hogy az illető szakaszok tartalmaznak-e anyaghibát.

A kihúzás során keletkező véletlen hosszú száldarabok véletlenszerűen tartalmazhatnak rossz fényáteresztő képességű részeket. Ezekből a száldarabokból kell kielégíteni a megrendeléseket, azaz le kell szabni adott számú és hosszú hibátlan üvegszálat.

Legyen az egy rúdból keletkező üvegszál teljes hossza  $H$  egység. Jelölje  $0 < p < 1$  annak a valószínűsége, hogy egység hosszú szakasz anyaghibát tartalmaz, és legyen  $q = 1 - p$ .

A kihúzás során keletkező véletlen hosszú száldarabokból vágjuk ki a rossz fényáteresztő képességű részeket. Azaz tekintsük a maximális hosszú hibátlan száldarabokat. (Hibátlan száldarabon ezentúl mindig maximális hosszú hibátlan száldarabot értünk.) Ezek közül a legalább  $h$  hosszúságúak számát jelölje  $\xi_h$  (ahol  $0 < h \leq H$  valós szám).

Jelen dolgozatban a hibátlan száldarabok véletlenszerű készletét jellemezzük a  $\xi_h$  valószínűségi változók momentumai segítségével.

Először diszkretizáljuk a feladatot. Megmutatjuk, hogy Prékopa András [2] cikkében a diszkrét feladattal ekvivalens problémát old meg. Az ő eredményei közül a várható értékekre vonatkozót átvisszük folytonos esetre. Ezzel meghatározzuk a legalább  $h$  hosszúságú száldarabok számának és összhosszának várható értékét.

A folytonos eredmény alapján megmutatjuk, hogy az anyaghibák elhelyezkedésével kapcsolatban tapasztalt jelenség csak úgy fordulhat elő, hogy az anyaghibák pontszerűek (kis kiterjedésűek), és egy szálon véges sok anyaghiba van. Ezért az anyaghibák jól leírhatók: a számuk Poisson eloszlású, a hibák maguk pedig egyenletesen oszlanak el.

\*A munkát az OTKA T 014102 és T 014302 számú kutatási szerzősége támogatta.

A  $\xi_h$  valószínűségi változók magasabb rendű momentumait először rögzített számú pontszerű anyaghibát feltételezve számítjuk ki. Majd a feltételes momentumokat a megfelelő valószínűségekkel súlyozva összegezzük.

## 2. A $\xi_h$ valószínűségi változó várható értékének meghatározása

### A diszkrét eset.

Osszuk fel gondolatban az egy rúdból keletkező üvegszál teljes hosszát egység hosszú szakaszokra. Ha egy ilyen egységszakaszban anyaghiba van, akkor azt az egységszakaszt eldobjuk. Jelölje  $\alpha_k$  a pontosan  $k$  hibátlan egységszakaszból álló összefüggő láncok számát. (Láncon maximális láncot értünk, ahogyan száldarabon is maximális hosszú száldarabot.)

Prékopa András [2] cikkében hosszú láncmolekulák bomlási folyamataival foglalkozik. Ezek a molekulák stabil egységekből állnak, amelyeket könnyen bomló kötések kapcsolnak össze láncná. Az egyes kötések bomlásai egymástól függetlenül mennek végbe. Speciális esetként vizsgálja, amikor ezek a kötések azonos valószínűséggel bomlanak fel. Tegyük fel, hogy kezdetben egy  $n$  stabil egységből álló láncmolekulánk van, és az egyes kötések  $P$  valószínűséggel bomlanak el. Jelölje  $a_k$  a bomlás során keletkező,  $k$  stabil egységből álló polimerek számát. Prékopa meghatározza az  $a_k$  valószínűségi változók első és második momentumait (a vegyes momentumokat is). Módszere könnyen általánosítható a magasabb rendű binomiális momentumok meghatározására. Most csak az alábbi, várható értékre vonatkozó eredményét fogjuk felhasználni:

$$(2.1) \quad E(a_k) = \begin{cases} P(1-P)^{k-1}[(n-k-1)P+2] & , \quad \text{ha } k < n \\ (1-P)^{n-1} & , \quad \text{ha } k = n \end{cases}$$

Legyen  $n = H+1$  és  $P = p$ ,  $1-P = q$ . Természetes megfelelés van az üvegszál-darabok és a polimerek leírása között: Az az esemény, hogy az egység hosszú üvegszál-szakaszok közül a  $k$ -adik anyaghibát tartalmaz, megfelel annak az eseménynek, hogy a  $k$ -adik és  $(k+1)$ -edik stabil molekula-egységet összekapcsoló kötés elbomlik. Ezért az üvegszál-darabokat leíró  $\alpha_k$  és a polimereket leíró  $a_{k+1}$  valószínűségi változók azonosak ( $k = 1, \dots, H$ ).

Tehát (2.1) alapján ismertek az  $\alpha_k$  változók várható értékei:

$$(2.2) \quad E(\alpha_k) = \begin{cases} pq^k[(H-k-1)p+2] & , \quad \text{ha } k < H \\ q^H & , \quad \text{ha } k = H \end{cases}$$

### A folytonos eset.

Legyen  $0 < h < H$  valós szám. Osszuk fel gondolatban az egy rúdból keletkező üvegszál teljes hosszát  $1/t$  hosszú szakaszokra ( $t = 1, 2, \dots$ ). Összesen  $Ht$  kis szakaszunk lesz. Egy kis szakasz  $q^{1/t}$  valószínűséggel lesz hibátlan (mivel függetlenek azok az események, hogy az egyes kis szakaszokban van-e anyaghiba). Jelölje  $\alpha_i^{(t)}$  a pontosan  $i$  hibátlan kis szakaszból álló összefüggő láncok számát. (2.2) alapján ismert ennek a közelítő változónak a várható értéke:

$$E(\alpha_i^{(t)}) = \begin{cases} (1-q^{1/t})q^{i/t}[(Ht-i-1)(1-q^{1/t})+2] & , \quad \text{ha } i < Ht \\ q^H & , \quad \text{ha } i = Ht \end{cases}$$

Bárhogyan is helyezkedik el a teljes  $H$  hosszú szálon egy legalább  $h$  hosszú szakasz, mindig teljesen lefed legalább  $[ht] - 1$  számú kis szakaszt. (Legyen  $t$  olyan nagy, hogy  $[ht] > 1$ ). Tehát mindegyik, legalább  $h$  hosszú hibátlan száldarabhoz hozzárendelhető egy olyan lánc, amelyik legalább  $[ht] - 1$  számú hibátlan kis szakaszból áll. Ebből az alábbi felső becslés adódik:

$$\sum_{i=[ht]-1}^{Ht} \alpha_i^{(t)} \geq \xi_h .$$

Hasonlóan: mindegyik olyan lánchoz, amelyik legalább  $[ht] + 1$  számú hibátlan kis szakaszból áll, hozzárendelhető egy legalább  $h$  hosszú hibátlan száldarab. Ebből az alábbi alsó becslés adódik:

$$\xi_h \leq \sum_{i=[ht]+1}^{Ht} \alpha_i^{(t)} .$$

( $h < H$  miatt elég nagy  $t$  esetén  $[ht] + 1 < H$ .) Ezzel a  $\xi_h$  valószínűségi változót két olyan valószínűségi változó közé szorítottuk, melyeknek különbsége

$$\alpha_{[ht]-1}^{(t)} + \alpha_{[ht]}^{(t)} .$$

Vezessük be az alábbi jelölést a  $\xi_h$  változó  $t$ -edik közelítésére:

$$(2.4) \quad \xi_h^{(t)} = \sum_{i=[ht]}^{Ht} \alpha_i^{(t)} .$$

Mivel  $\xi_h^{(t)}$  is a két határoló valószínűségi változó közé esik, azért a közelítés pontossága így becsülhető:

$$\left| \xi_h - \xi_h^{(t)} \right| \leq \alpha_{[ht]-1}^{(t)} + \alpha_{[ht]}^{(t)} .$$

A jobb oldal várható értéke nullához tart, amint  $t$  végtelenhez. Ugyanis helyettesítsük be a (2.3) formulákat. Folytonossági okból elég megmutatni hogy az alábbi kifejezés nullához tart:

$$\left(1 - q^{1/t}\right) q^{i/t} \left[ (H - h)t \left(1 - q^{1/t}\right) + 2 \right] .$$

Csak a  $t \left(1 - q^{1/t}\right)$  tag korlátos voltáról kell meggyőződni. Ez pedig nemcsak hogy korlátos, hanem konvergens is, és határértéke  $-\ln(q)$ . (A  $-t \left(1 - q^{1/t}\right)$  kifejezés ugyanis a  $q^x$  függvénynek a 0 és az  $1/t$  pontok között felírt differencia-hányadosa.)

Azért  $0 < h < H$  esetén

$$(2.5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} E \left( \left| \xi_h - \xi_h^{(t)} \right| \right) = 0 .$$

Tehát  $0 < h < H$  esetén a  $\xi_h$  változó várható értékét a  $\xi_h^{(t)}$  változók várható értékeivel közelíthetjük. Utóbbi változók (2.4) definíciójába helyettesítsük be a (2.3) formulákat:

$$\begin{aligned} E\left(\xi_h^{(t)}\right) &= \sum_{i=\lfloor ht \rfloor}^{Ht-1} \left(1 - q^{1/t}\right) q^{i/t} \left[(Ht - i - 1) \left(1 - q^{1/t}\right) + 2\right] + q^H \\ &= \left[(Ht - 1) \left(1 - q^{1/t}\right) + 2\right] \left(1 - q^{1/t}\right) \sum_{i=\lfloor ht \rfloor}^{Ht-1} q^{i/t} \\ &\quad - \left(1 - q^{1/t}\right)^2 \sum_{i=\lfloor ht \rfloor}^{Ht-1} i q^{i/t} + q^H. \end{aligned}$$

Tudjuk hogy  $t \rightarrow \infty$  esetén  $t(1 - q^{1/t}) \rightarrow -\ln(q)$ ; az összegeket integrálok közelítésének tekintve pedig az alábbi határértékek adódnak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \sum_{i=ht}^{Ht} q^{i/t} &\rightarrow \left[ \frac{q^x}{\ln(q)} \right]_h^H, \\ \frac{1}{t^2} \sum_{i=ht}^{Ht} i q^{i/t} &\rightarrow \left[ \frac{x q^x}{\ln(q)} - \frac{q^x}{\ln(q)^2} \right]_h^H. \end{aligned}$$

Fentieket behelyettesítve adódik  $0 < h < H$  esetén a keresett várható érték

$$(2.6) \quad E(\xi_h) = q^h - \ln(q) q^h (H - h).$$

(Látszik hogy ez a formula  $h = H$  esetén is igaz.)

**Megjegyzés.** A fentiek mintájára meghatározható a legalább  $h$  hosszúságú, hibátlan száldarabok összhosszának várható értéke. Jelölje  $\zeta_h$  a legalább  $h$  hosszúságú, hibátlan száldarabok összhosszát (ahol  $0 < h < H$ ). Az előző részhez hasonlóan közelítsük ezeket az alábbi változókkal:

$$\zeta_h^{(t)} = \sum_{i=\lfloor ht \rfloor}^{Ht} \frac{i}{t} \alpha_i^{(t)}.$$

Mint a  $\xi$  változókra, itt is könnyen megmutatható, hogy ez jó közelítés:

$$E(\zeta_h) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\zeta_h^{(t)}).$$

$\zeta_h^{(t)}$  várható értéke a (2.3) formulák segítségével fölírható. A limesz pedig a (2.6) formulához hasonlóan képezhető. Az ott említett formulákon felül használjuk még az alábbi határértéket:

$$\frac{1}{t^3} \sum_{i=ht}^{Ht} i^2 q^{i/t} \rightarrow \left[ \frac{x^2 q^x}{\ln(q)} - \frac{2x q^x}{\ln(q)^2} + \frac{2q^x}{\ln(q)^3} \right]_h^H.$$



A  $0 < h < H$  esetre az alábbi várható érték adódik:

$$(2.7) \quad E(\zeta_h) = q^h H - \ln(q) q^h h (H - h) .$$

(Látszik hogy a formula  $h = H$  esetén is igaz.)

### 3. Az anyaghibák véletlen elhelyezkedésének jellemzése

Megmutatjuk hogy 1 valószínűséggel véges sok pontszerű anyaghiba van a szálon.

Legyen ugyanis  $H = h_1 > h_2 > \dots$  monoton csökkenőleg nullához tartó sorozat. Akkor a megfelelő  $\xi_h$  változók sorozata monoton nő

$$\xi_{h_n} \leq \xi_{h_{n+1}} \quad (n = 1, 2, \dots) .$$

Az  $n$ -edik lépésben csak akkor lehet szigorú a növekedés, azaz

$$\xi_{h_n} < \xi_{h_{n+1}} ,$$

ha keletkezik a  $[h_{n+1}, h_n)$  intervallumba eső hosszúságú hibátlan száldarab. Jelölje  $B_n$  az utóbbi eseményt. Ennek valószínűsége felülről becsülhető

$$P(B_n) \leq E(\xi_{h_{n+1}} - \xi_{h_n}) ,$$

mert a jobb oldal az ilyen száldarabok számának a várható értéke. Ezekből a várható értékekből alkotott sor (2.6) szerint konvergens:

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(\xi_{h_{n+1}} - \xi_{h_n}) = 1 - \ln(q)H - q^H .$$

Azért  $\sum P(B_n)$  véges, és a Borel-Cantelli lemma szerint a  $B_n$  események közül 1 valószínűséggel csak véges sok következik be. Ezzel megmutattuk, az egy rúdból kihúzott üvegszálból 1 valószínűséggel véges sok hibátlan száldarab keletkezik. Tehát 1 valószínűséggel az anyaghibák lefedhetők véges sok olyan intervallummal, amely intervallumokban az anyaghibák sűrűn helyezkednek el.

Tekintsük most a legalább  $h$  hosszú hibátlan szakaszok összhosszát jelentő  $\zeta_h$  változókat. Mivel ezen változók sorozata monoton növekvő és korlátos:

$$\zeta_{h_n} \leq \zeta_{h_{n+1}} \leq H ,$$

azért értelmezhető az alábbi valószínűségi változó:

$$\zeta = \lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_{h_n} .$$

A monoton növekedés a várható értékekre is áll:

$$E(\zeta_{h_n}) \leq E(\zeta) .$$

Itt a bal oldal (2.7) szerint  $H$ -hoz tart, amint  $n$  végtelenhez. Ebből az alábbi alsó becslést kapjuk:

$$H \leq E(\zeta) .$$

Ez csak úgy lehet, hogy 1 valószínűséggel  $\zeta = H$ . Szavakban: a legalább  $h$  hosszú hibátlan száldarabok összhossza  $H$ -hoz tart, amint  $h$  nullához.

Tehát az anyaghibák elhelyezkedésével kapcsolatban tapasztalt jelenség, miszerint egyforma hosszú szakaszok azonos valószínűséggel tartalmaznak anyaghibát, és diszjunkt szálszakaszok esetén egymástól függetlenek azok az események, hogy az illető szakaszok anyaghibát tartalmaznak, csak úgy fordulhat elő, hogy az anyaghibák pontszerűek (kis kiterjedésűek). Ezt a következtetést még ellenőrizni kell a gyakorlatban. Mindenesetre egybevág vele az a megfigyelés, hogy a szakadásokat apró szemcsék okozzák, melyek az üvegrúd anyagába kerülnek. Valószínű, hogy még kisebb szemcsék nem okoznak szakadást, de rontják a fényáteresztő képességet. A hibás száldarabokban a csökkent fényáteresztő képességet eszerint nem az alapanyag eltérő fizikai vagy vegyi jellemzői okoznák.

Ismeretes, hogy akkor a pontszerű anyaghibák száma Poisson eloszlást mutat, melynek paramétere  $-\ln(q)H$ .

Feltehető, hogy maguk az anyaghibák egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a szálon: ugyanis könnyű megmutatni, hogy ha Poisson eloszlás szerinti számú anyaghiba oszlik el egyenletesen a teljes szálon, akkor a fent dőlt betűvel szedett jelenség lesz tapasztalható. Ez a tapasztalt jelenség pedig Prékopa [2] cikke alapján meghatározza a  $\xi_h$  valószínűségi változók momentumait.

#### 4. A $\xi_h$ valószínűségi változók magasabb rendű momentumainak meghatározása

##### A második momentumok.

Legyenek  $0 < h, g \leq H$  valós számok.

$$E\left(\xi_h \xi_g - \xi_h^{(t)} \xi_g^{(t)}\right) = E\left[\xi_h \left(\xi_g - \xi_g^{(t)}\right)\right] + E\left[\left(\xi_h - \xi_h^{(t)}\right) \xi_g^{(t)}\right]$$

Itt  $\xi_h \leq H/h$ . Másrészt  $t \rightarrow \infty$  esetén  $E\left(\left|\xi_g - \xi_g^{(t)}\right|\right)$  nullához tart (2.5) szerint. Hasonló becslés adható a másik tagra is. Azért a korábban használt közelítés a szorzatra is jó:

$$(4.1) \quad E(\xi_h \xi_g) = \lim_{t \rightarrow \infty} E\left(\xi_h^{(t)} \xi_g^{(t)}\right) .$$

Mint az első momentumoknál, a probléma itt is visszavezethető diszkrét esetre: Prékopa András [2] cikke alapján ismertek az  $\alpha_i^{(t)}$  valószínűségi változók második momentumai. A

határátmenet képzése nem okoz elméleti nehézséget, de a formulák terjedelmük miatt papíron már nem áttekinthetők. (Szimbolikus matematikai számításokra képes programcsomag segítségével azonban a feladat megoldható.)

Az alábbiakban egy másik számítási módot vázolok, melyben már felhasználjuk, hogy a pontszerű anyaghibák száma Poisson eloszlást mutat, melynek paramétere  $-\ln(q)H$ ; maguk az anyaghibák pedig egyenletes eloszlás szerint helyezkednek el a szálon. Először rögzített  $r$  számú anyaghibát feltételezve számítjuk ki a második momentumot. Utána az  $r = 0, 1, \dots$  esetekre külön számított feltételes várható értékeket a megfelelő valószínűségekkel súlyozva összegezzük.

Tegyük fel tehát, hogy a teljes  $H$  hosszú üvegszálon  $r$  szakadás keletkezik. Jelölje  $\ell_1, \dots, \ell_{r+1}$  azoknak a hibátlan száldaraboknak a hosszait, melyekre a teljes üvegszál szétszakad. A hosszakat a teljes üvegszál egyik végétől a másik felé haladva tekintjük, rögzített sorrendben. A további tárgyaláshoz két lemmára lesz szükségünk, melyeknek bizonyítása megtalálható Luc Devroye [1] könyvének *Uniform and Exponential Spacings* című fejezetében.

**1. Lemma.** Mivel az anyaghibák egyenletesen oszlanak el a szálon, azért az első  $r$  hibátlan száldarabnak a hosszait leíró  $(\ell_1, \dots, \ell_r)$  vektorok egyenletesen oszlanak el az alábbi szimplexben

$$\ell_1, \dots, \ell_r \geq 0, \quad \sum_{u=1}^r \ell_u \leq H.$$

**2. Lemma.** Tetszőleges  $(h_1, \dots, h_{r+1})$  nem-negatív számok esetén

$$P(\ell_1 \geq h_1, \dots, \ell_{r+1} \geq h_{r+1}) = \left[ 1 - \sum_{u=1}^{r+1} \frac{h_u}{H} \right]_+^r,$$

ahol  $[\cdot]_+$  a szám pozitív részét jelenti.

Visszatérve a feltételes momentumok számítására, jelölje  $Y_r$  azt az eseményt, hogy pontosan  $r$  anyaghiba van a szálon. Az anyaghibákat most is úgy közelítjük, hogy a szálat  $1/t$  hosszú szakaszokra bontjuk, és ha egy ilyen kis szakaszban anyaghiba van, akkor azt a teljes kis szakaszt eldobjuk. Jelölje  $Y_r^{(t)}$  azt az eseményt, hogy a  $t$ -edik közelítés szerint az  $r$  számú anyaghiba mind különböző kis szakaszba esik, a hibátlan kis szakaszokból álló láncok pedig mind különböző hosszúak, és nincs köztük üres.

Akkor  $Y_r \supset Y_r^{(t)}$ . Megmutatjuk, hogy az  $(Y_r \setminus Y_r^{(t)})$  kivételes esemény valószínűsége nullához tart amint  $t \rightarrow \infty$ . Tekintsük ugyanis az 1. lemmában szereplő szimplexet. A vizsgált kivételes eseménynek a szimplex azon pontjai felelnek meg, melyek néhány hipersík közül legalább egyhez közelebb vannak, mint  $1/t$ . Ez a környezet pedig  $t$  növelésével egyre szűkül.

Azért a (4.1) közelítés megfelelője igaz a feltételes várható értékekre

$$(4.2) \quad E(\xi_h \xi_g | Y_r) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\xi_h^{(t)} \xi_g^{(t)} | Y_r^{(t)}).$$

Ha bekövetkezik az  $Y_r^{(t)}$  esemény, akkor a  $t$ -edik közelítésben a  $Ht$  kis szakasz közül pontosan  $r$  számút el kell dobunk. Minthogy a hibák egyenletesen oszlanak el, azért bármelyik  $r$ -est egyforma valószínűséggel dobjuk el. Ezzel a megmaradó  $Ht - r$  hosszt felbontjuk  $r + 1$  számú egész hosszú darabra.

Helyettesítsük a (4.2) formula jobb oldalában szereplő  $\xi_h^{(t)} \xi_g^{(t)}$  szorzatba ezen változók (2.4) definícióját. A szorzat feltételes várható értéke két tag összegére bontható:

$$(4.3) \quad E \left( \sum_{i=\lfloor ht \rfloor}^{Ht} \sum_{\substack{j=\lfloor gt \rfloor \\ i \neq j}}^{Ht} \alpha_i^{(t)} \alpha_j^{(t)} \mid Y_r^{(t)} \right) + E \left( \sum_{i=\lfloor t \max(h,g) \rfloor}^{Ht} \left( \alpha_i^{(t)} \right)^2 \mid Y_r^{(t)} \right).$$

Megmutatjuk hogy a két tag limesze külön is képezhető.

A második részösszegben a négyzetre emelés művelete elhagyható. Ha ugyanis bekövetkezik az  $Y_r^{(t)}$  esemény, akkor az  $\alpha_i^{(t)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) valószínűségi változók 0 vagy 1 értéket vesznek fel. A második tag azért a legalább  $\lfloor t \max(h, g) \rfloor$  számú hibátlan kis rész-intervallumot tartalmazó láncok számának a feltételes várható értéke. A korábban már alkalmazott technikával könnyű belátni, hogy  $t \rightarrow \infty$  esetén ezen részösszeg határértéke  $E(\xi_{\max(h,g)} \mid Y_r)$ , azaz a legalább  $\max(h, g)$  hosszú darabok számának várható értéke  $r$  szakadás esetén.

Ezt a feltételes várható értéket most úgy számoljuk ki, hogy külön tekintjük a teljes  $H$  hosszú üvegszál egyik végétől a másik felé haladva az első,  $\dots$ ,  $(r+1)$ -edik helyeken levő száldarabok közül a legalább  $\max(h, g)$  hosszúak számának a várható értékét. Jelölje rendre  $\ell_1, \dots, \ell_{r+1}$  az első,  $\dots$ ,  $(r+1)$ -edik helyeken levő száldarabok hosszait. A számítandó várható érték ezzel a jelöléssel

$$P(\ell_1 \geq \max(h, g)) + \dots + P(\ell_{r+1} \geq \max(h, g)).$$

A várható érték azért helyettesíthető valószínűséggel, mert a megfelelő valószínűségi változók 0 vagy 1 értéket vesznek föl, aszerint, hogy a megfelelő helyen elég hosszú száldarab van-e. A fenti tagok mind egyformák, és összegük a 2. lemma szerint

$$T_2 = (r+1) \left[ 1 - \frac{\max(h, g)}{H} \right]_+^r.$$

A (4.3) második részösszegének limeszét ezzel kiszámítottuk, most áttérünk az első részösszegre. Ezt szavakkal így lehet leírni: Bontsuk fel a teljes  $Ht - r$  hosszt  $r + 1$  számú egész hosszúságú részre, úgy hogy a részek közt ne legyenek egyforma hosszúak. Mindegyik ilyen felbontás egyforma valószínűséggel fordul elő. Egy-egy felbontásban a részhosszakból alkossunk olyan rendezett párokat, melyekben a tagok különbözőek és rendre legalább  $\lfloor ht \rfloor$ ,  $\lfloor gt \rfloor$  hosszúak. Az első részösszeg ezen párok számának a várható értéke.

A korábban már alkalmazott technikával könnyű belátni, hogy  $t \rightarrow \infty$  esetén ezen részösszeg határértéke a következő: Tegyük fel hogy a teljes  $H$  hosszú szál  $r + 1$  hibátlan darabra szakad. Ezen darabokból alkossunk olyan rendezett párokat, melyekben a tagok különbözőek és rendre legalább  $h, g$  hosszúak. A limesz ezen párok számának a várható értéke.

Jelölje rendre  $\ell_1, \dots, \ell_{r+1}$  azoknak a hibátlan száldaraboknak a hosszait, melyekre a teljes üvegszál szétszakad. A számítandó várható érték ezzel a jelöléssel

$$\sum_{u=1}^{r+1} \sum_{\substack{v=1 \\ u \neq v}}^{r+1} P(\ell_u \geq h \text{ és } \ell_v \geq g) .$$

A tagok itt mind egyformák, ezért az összeg a 2. lemma szerint

$$T_1 = (r+1)r \left[ 1 - \frac{h+g}{H} \right]_+^r .$$

Ezzel a (4.2) bal oldalán szereplő feltételes várható értékek limeszét kiszámítottuk. A várható érték ezeknek  $r$  szerinti súlyozott összege

$$E(\xi_h \xi_g) = \sum_{r=0}^{\infty} E(\xi_h \xi_g | Y_r) P(Y_r) ,$$

ahol a súlyok a  $-\ln(q)H$  paraméterű Poisson eloszláshoz tartozó valószínűségek:

$$P(Y_r) = \frac{(-\ln(q)H)^r}{r!} q^H .$$

Képezzük ezt az összeget külön a  $T_1$  és a  $T_2$  tagra. (Az első tagban szereplő szorzatot érdemes szétbontani  $(r+1)r = r(r-1) + 2r$  szerint.) Az exponenciális függvény Maclaurin sorát felhasználva adódik:

$$E(\xi_h \xi_g) = \ln(q)^2 q^{h+g} [H - h - g]_+^2 - 2 \ln(q) q^{h+g} [H - h - g]_+ + E(\xi_{\max(h,g)}) .$$

**A magasabb rendű momentumokról.**

A  $p$ -edik momentumok számítását vázoljuk. Legyenek  $0 < h_1, \dots, h_p \leq H$  adott valós számok. A (4.2) közelítéshez hasonlóan igazolható az alábbi formula:

$$E(\xi_{h_1} \cdots \xi_{h_p} | Y_r) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\xi_{h_1}^{(t)} \cdots \xi_{h_p}^{(t)} | Y_r^{(t)}) .$$

A jobb oldalon szereplő feltételes várható érték a (4.3) felbontáshoz hasonlóan itt is részösszegekre bontható. Ezen részösszegek száma annyi, ahányféleképp az  $1, \dots, p$  indexek osztályokba sorolhatók.

Egy-egy részösszeg határértéke a második momentumoknál alkalmazott technikával számítható a 2. lemma alapján. Ha például az  $1, \dots, p$  indexek mind külön osztályokba tartoznak, akkor a megfelelő részösszeg határértéke

$$(r+1)r \cdots (r-p+2) \left[ 1 - \sum_{u=1}^p \frac{h_u}{H} \right]_+^r.$$

A fentiek alapján meghatározott  $E(\xi_{h_1} \dots \xi_{h_p} | Y_r)$  feltételes várható értékekből kikeverhető a várható érték.

A továbbiakban kiszámoljuk a harmadik és negyedik momentumokat.

Legyenek  $0 < h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq H$ . Vezessük be a  $h = h_1 + h_2 + h_3$  jelölést. Az  $E(\xi_{h_1} \xi_{h_2} \xi_{h_3})$  harmadik momentumra az alábbi kifejezés adódik

$$\begin{aligned} & -\ln(q)^3 q^h [H-h]_+^3 + 3\ln(q)^2 q^h [H-h]_+^2 \\ & + E(\xi_{h_1} \xi_{h_3}) + 2E(\xi_{h_2} \xi_{h_3}) \\ & - 2E(\xi_{h_3}) . \end{aligned}$$

A felhasznált várható értékek ismertek. A rekurzív formát az explicit felírással szemben a tömörség kedvéért választottuk.

Legyenek  $0 < h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq h_4 \leq H$ . Vezessük be a  $h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$  jelölést. Az  $E(\xi_{h_1} \xi_{h_2} \xi_{h_3} \xi_{h_4})$  negyedik momentumra az alábbi kifejezés adódik

$$\begin{aligned} & \ln(q)^4 q^h [H-h]_+^4 - 4\ln(q)^3 q^h [H-h]_+^3 \\ & + E(\xi_{h_1} \xi_{h_2} \xi_{h_4}) + 2E(\xi_{h_1} \xi_{h_3} \xi_{h_4}) + 3E(\xi_{h_2} \xi_{h_3} \xi_{h_4}) \\ & - 2E(\xi_{h_1} \xi_{h_4}) - 3E(\xi_{h_2} \xi_{h_4}) - 6E(\xi_{h_3} \xi_{h_4}) \\ & + 6E(\xi_{h_4}) . \end{aligned}$$

#### IRODALOM

- [1] DEVROYE, LUC, *Non-Uniform Random Variate Generation*, Springer-Verlag, New York, 1986.
- [2] PRÉKOPA ANDRÁS, „Hosszú láncmolekulák bomlási folyamatának valószínűségszámítási tárgyalása”, *MTA Alkalmazott Matematikai Intézetének Közleményei II. kötet* (1953), 103–123.

(Beérkezett: 1997. szeptember 4.)

FÁBIÁN CSABA  
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM,  
OPERÁCIÓKUTATÁSI TANSZÉK  
1088 BUDAPEST, MŰZEUM KRT 6-8.

#### STATISTICAL CHARACTERIZATION OF DEFECTIVE SECTIONS IN A LENGTH OF FIBERGLASS

Cs. FÁBIÁN

Fiberglass may contain faulty sections in a random manner. For a given length of fiber, consider the maximal length intervals of appropriate quality. The numbers and lengths of those intervals are characterized in the paper.

*Alkalmazott Matematikai Lapok* (1998)

# SZABÁLYOS RÁCSSZERKEZETEK ÁTLÓS MEREVÍTÉSE SÍKBAN

NAGY GYULA

Budapest

Rúd-csukló szerkezetek rácsszerű elrendezését vizsgálva a síkban azt tapasztaljuk, hogy további rudakra van szükség a szerkezet merevségéhez. Ezeket a rudakat a rácssokszögek átlói közül választva megadjuk a szerkezet merevségének feltételét, ha a rácssokszögek szemköztes oldalai az elmozdulások alatt párhuzamosak egymással. Alkalmazva Lovász és Yemini tételét bizonyítjuk a négyzetráccsal izomorf szerkezetek generikus merevségének feltételét, ha átlókat használunk a merevítéshez.

## 1. Bevezetés

A merev rudakból és minden irányú elfordulást megengedő csuklókból álló szerkezeteket nevezzük rúd-csukló szerkezeteknek.

*1.1. Definíció.* egy rúd-csukló szerkezet akkor merev, ha a csuklók minden a rudak által megengedett folytonos elmozdulása után az elmozdult szerkezet az eredetivel egybevágó marad.

Olyan szerkezetek merevségét vizsgáljuk az Euklideszi síkban, amelyekben a csuklók egy szabályos rácsnak (a mozaikokat is ide értjük) a rácspontjaiban vannak, a rudak pedig a rács éleinek felelnek meg (szabályos háromszögrács, négyzetrács, szabályos hatszögrács). Az első merev, a másik kettő nem. A merevítéshez a rácssokszögek átlóit, mint átlós merevítő rudakat használjuk, és feltesszük még, hogy a rácssokszögek szemköztes oldalai a rács lehetséges mozgásai során párhuzamosak maradnak. Ez automatikusan teljesül a négyzetrácsnak megfelelő szerkezetben. Ellenben a hatszögrácsnak és néhány félig szabályos mozaiknak megfelelő szerkezetben, mint például a  $(8,8,4)$ , nem teljesül.

*1.2. Definíció.* Speciálisnak nevezzük azokat a szerkezeteket, amelyek sokszögeiben a szemköztes oldalak párhuzamosak maradnak a szerkezet mozgásai során.

Kérdéseink: mennyi átlós merevítő szükséges egy speciális rács merevítéséhez, illetve hol helyezkednek el az átlós merevítők?

## 2. Négyzetrács merevítése

A merevségi mátrix felírása az adott szerkezetre és a mátrix rangjának meghatározása megoldja a problémát [4], de mi ennél egyszerűbben szeretnénk megállapítani a speciális rácsok merevségét. Kihasználva a rácsok speciális tulajdonságát, konstruálunk egy gráfot, amelynek összefüggéséből következik a rácsszerkezet merevsége. [2]

**2.1. Definíció.** A négyzetrács merevítés gráfja egy  $G(n, m)$  páros gráf, amelynek csúcsai a rács  $n$  sorának és  $m$  oszlopának felelnek meg, élei pedig a sorok illetve oszlopok találkozásában elhelyezkedő négyzetek átlós merevítőinek felelnek meg.

A következő definíció és tétel hasznos lesz a továbbiakban:

Természetes módon feleltessünk meg egy szerkezetnek (általában nem rácsszerkezet) egy  $C$  gráfot.

**2.2. Definíció.** A  $C$  gráf csúcsai feleljenek meg a szerkezet csuklóinak és a gráf csúcsai között akkor legyen él, ha a megfelelő csuklók között van rúd.

A továbbiakban szükség lesz a következőre:

**2.1. TÉTEL.** Egy dimenzióban (egyenesen, köríven) egy szerkezet akkor és csak akkor merev, ha a megfelelő  $C$  gráf összefüggő.

*Bizonyítás.* ha a  $C$  gráf nem összefüggő, akkor a komponenseinek megfelelő szerkezetek egymástól függetlenül tudnak mozogni, vagyis nem alkotnak egyetlen szerkezetet. Ha a  $C$  gráf összefüggő, akkor a szerkezet minden csuklójától eljuthatunk rudak mentén bármely csuklóhoz. Mivel egy dimenzióban csak két lehetséges elmozdulási irány van, ezért ha a szerkezet egyik csuklója elmozdul valamely irányban, akkor a hozzá csatlakozó rudak is elmozdulnak a másik végpontban levő csuklóikkal együtt. Így minden csukló és rúd ugyanolyan mozgást végez. Ezért nincs olyan elmozdulása a szerkezetnek, amelynél a kezdeti és a végállapot nem lenne egybevágó, így a szerkezet merev.

Az előző tételt felhasználva adunk egy újabb bizonyítást a következő Bolker és Crapo (1979) féle tételre [2]:

**2.2. TÉTEL.** Egy  $n \times m$ -es négyzetrács, mint rúd-csukló szerkezet átlós merevítőkkal merevítve akkor és csak akkor merev, ha a megfelelő merevítés gráf összefüggő (1. ábra).

*Bizonyítás.* A négyzetek élei legyenek egységnyiek. Mivel az egy sorban szereplő függőleges rudak párhuzamosak egymással a lehetséges elmozdulásaik során, ezért egyetlen vektorral jellemezhetők. Hasonlóan az egyes oszlopok vízszintes rúdjai is. Vegyük fel az oszlopoknak, illetve soroknak megfelelő vektorokat egy egység körbe. Ha található egy átlós merevítő egy oszlop és egy sor találkozásánál, akkor a megfelelő vektorok merőlegesek egymásra, ami azt jelenti, hogy végpontjaik  $\pi/2$  távolságra vannak egymástól az egység körön. Így képezhetünk egy szerkezetet, amelynek csuklói az egységvektorok végpontjai az origó középpontú egység körön, és rúdjai azon csuklók közötti ívek, amelyekhez tartozó négyzetekben van átlós merevítő az eredeti négyzetrácsban. A 2.1 tételt felhasználva a négyzet rács, mint rúd-csukló szerkezet akkor lesz merev, ha a köríven definiált szerkezet  $C$  gráfja összefüggő. Mivel a  $C$  gráf és a merevítés gráf izomorf, ezért a Bolker-Crapo tételt igazoltuk.

### 3. Speciális rácsszerkezetek

Hasonló módon határozhatjuk meg a szabályos hatszögrács szerkezet, illetve  $(8, 8, 4)$  Arkhimédész-féle félig szabályos mozaikból alkotott rácsszerkezet merevítésére vonatkozó



szükséges és elégséges feltételeket, ha a szerkezet sokszögeiben a szemköztes oldalak továbbra is párhuzamosak maradnak a lehetséges elmozdulások során, tehát speciális rácsszerkezeteket vizsgálunk. További feltétel még, hogy a rácssokszögek legrövidebb átlóit használjuk a szerkezet merevítésére. A rövid átlók használata szükséges ahhoz, hogy egy átlós merevítő meg tudja akadályozni a hozzá tartozó két rúd egymáshoz viszonyított elmozdulását. A 2.2 tételhez hasonló tételt mondhatunk ki most is, és a bizonyítás is hasonlóan történik. A szabályos hatszögrács éleit három vektor osztállyal jellemezhetjük (2. ábra), a vízszinteseket jelöljük  $a$ -val, az ezzel  $60^\circ$ -os szöget bezárót  $b$ -vel és a következőt  $c$ -vel. A merevítés gráf egy három osztályú gráf, mely csúcsainak osztálya megfelel a három vektor osztálynak, maguk a csúcsok pedig az egyes vektoroknak. A merevítés gráf két csúcsa közötti él akkor létezik, ha a megfelelő két vektorral párhuzamos két olyan hatszög oldal van a rácsban, amelyek egy rövid átlóval, mint átlós merevítővel egy háromszöget alkotnak. Így a két vektor nem mozdul el egymáshoz képest. A  $(8, 8, 4)$  rács éleit, 3. ábra, négy vektor osztállyal jellemezhetjük. Hasonlóan a hatszögrácshoz, a  $(8, 8, 4)$  rácsához tartozó merevítés gráf egy négy osztályú gráf. Ezután kimondhatjuk a következő állítást:

**3.1. TÉTEL.** *Speciális hatszögrács és speciális  $(8, 8, 4)$  rács rövid átlókkal merevítve akkor és csak akkor merev, ha a megfelelő merevítés gráfjuk összefüggő.*

*Bizonyítás.* A rácsok speciális tulajdonsága miatt a rácssokszögek szemköztes oldalai párhuzamosak, így a rövid átlók használata következtében a mozgások során párhuzamos rudaknak megfelelő vektorok mozgásai kölcsönösen egyértelműek. Így elég megakadályoznunk a vektorok egymáshoz viszonyított elfordulását az egységkörben, azaz végpontjaik egymáshoz viszonyított elmozdulását az egységkörön (4. ábra). Az egységkörön keletkező egydimenziós szerkezet merevségéhez szükséges és elégséges, hogy annak  $C$  gráfja összefüggő legyen. Ez a gráf izomorf a szerkezet merevítés gráfjával. Ezzel tételünket igazoltuk.

Az előző bizonyítás általánosításaként igazolható a következő:

**3.2. TÉTEL.** *Speciális kockarács, mint rúd csukló szerkezet akkor és csak akkor merev, ha a háromosztályú merevítés gráfjának a három darab 2-2 osztály által feszített rész páros gráfja összefüggő (5. ábra) [4].*

Más szavakkal, a lapátlókkal, mint átlós merevítőkkal merevített speciális kockarács akkor és csak akkor merev, ha három él irányú merőleges vetületei, mint síkbeli négyzetrácsok merevek.

A speciális rácsok rövid átlós merevítésének szükséges és elégséges feltétele síkban a megfelelő merevítés gráf összefüggősége. Mivel a bizonyítások során csak a rácsban szereplő sokszögek szemköztes oldalainak párhuzamosságát használjuk, ezért az eddigieknél általánosabb rácsszerkezetekre is igazak a tételeink, nevezetesen olyanokra, amelyekben a rácssokszögek affin megfelelői a szabályos vagy félig szabályos rácsok rácssokszögeinek. Ezt speciális kockarácsra szintén elmondhatjuk a térben.

#### 4. Generikus merevség

Gáspár Zsolt kérdezte, hogy a rácsszerkezetet ugyan megtartó, de a párhuzamosságot nem megtartó szerkezetekre tudunk-e a fentiekhez hasonló tételt kimondani? Természetesen továbbra is az Euklideszi síkban. Négyzetrácsal izomorf szerkezetekre tudunk, vagyis olyan szerkezetekre, amelyeknek  $C$  gráfja azonos valamely  $m \times n$ -es négyzetrácsból képzett gráffal úgy, hogy a négyzetrács csúcsai a gráf csúcsainak, élei a gráf éleinek felelnek meg. Egy gráfból számtalan szerkezet realizálható. Ezek között lehetnek merev és nem merev szerkezetek is. Ha ugyanis a szerkezetnek csak a gráfja adott, akkor nem dönthető el egyértelműen a szerkezet merevsége, mert a rudak hosszának megválasztása befolyásolja azt.

**4.1. Definíció.** Egy rúd csukló szerkezetről akkor mondjuk, hogy generikus, ha a csuklók koordinátái algebrailag függetlenek a racionális test felett [3], [5].

Más szavakkal mondhatjuk a következőt. Egy szerkezet akkor generikus, ha csuklóit kicsit elmozdítva a rudak hosszának kicsi megváltoztatásával kapott új szerkezet továbbra is ugyanolyan tulajdonságú marad a merevség szempontjából, mint az eredeti.

Igazolható a következő:

**4.1. TÉTEL.** *Ha egy gráfnak megfeleltetett valamely generikus szerkezet merev, akkor a gráfnak megfeleltetett összes generikus szerkezet merev. Ha egy gráfnak megfeleltetett valamely generikus szerkezet nem merev, akkor a többi generikus szerkezet sem az [1].*

Azokat a gráfokat nevezzük generikusan merevnek, amelyekhez tartozó generikus szerkezetek merevek. A 6. ábrán látható bal oldali szerkezet merev, mert a négy alsó csukló egy egyenesen van, de nem generikusan merev. A jobb oldali szerkezet nem merev, de mégis generikusan merev. A bal oldalinál az alsó rudak hosszának megváltoztatásával nem merev szerkezethez, a jobb oldalinál a szaggatottan jelölt változtatással merev szerkezethez jutunk. Ha egy gráf generikusan merev, akkor a megfelelő szerkezetek közül majdnem mindegyik merev. Ha egy szerkezet merev, akkor a megfelelő gráf nem feltétlenül generikusan merev, ilyen például a bal oldali szerkezet.

1970-ben Laman [2] adott feltételt generikusan merev gráfokra síkban. Legyen  $G'(V'E')$  részgráfja  $G(V, E)$  gráfnak és jelöljük a megfelelő kisbetűkkel az elemszámokat.

**4.2. TÉTEL.** *Ha a  $G$  gráfban  $e = 2v - 3$  és minden  $G'$  részgrádjára  $e' \leq 2v' - 3$ , akkor  $G$  generikusan merev.*

Mivel az eredeti gráf összes részgrádjának a vizsgálata szükséges, ezért a merevség megállapítása exponenciális hosszúságú algoritmust igényel. Ha észrevevesszük, hogy a gráf melyik részgrájában nem teljesül a feltétel, akkor könnyen eldönthetjük, hogy a gráf nem merev.

Lovász és Yemini [3] eredménye 1982-ből csak polinomiális hosszúságú algoritmust igényel a síkbeli generikus merevség problémájának megoldásához.

**4.2. Definíció.**  $G_e$  jelölje azt a gráfot, amelyet  $G$  egy  $e$  élének duplázásával kapunk.

**4.3. Definíció.** Az  $F(V, E')$  fa feszítőfája a  $G(V, E)$  gráfnak ha  $E' \subseteq E$ .

4.3. TÉTEL. Lovász és Yemini tétele [3]: Egy  $G$  gráf akkor és csak akkor generikusan merev, ha bármely  $e$ -re  $G_e$ -nek van két közös élt nem tartalmazó feszítőfája.

A következő állításra (fedő tétel) szükségünk lesz a továbbiakban:

4.4. TÉTEL. Ha  $B$  egy összefüggő páros gráf  $X$  és  $Y$  osztályokkal, akkor  $B_e$  éleinek van két diszjunkt élhalmaza, amelyből az egyik lefedi  $X$ -et, a másik  $Y$ -t.

*Bizonyítás.* 4.4-et elég megmutatni arra az esetre, ha  $B$  fa.  $B_e$ -nek vagy van első fokú pontja, vagy  $B_e$  két pontból áll, amelyek a duplázott példányával vannak összekötve. Az elsőfokú pontokat a csatlakozó élekkel fedjük le. Ezeket az éleket elhagyva a gráfból ismét lehetnek elsőfokú pontok, amelyeket ismét a csatlakozó élekkel fedhetünk le. Ezt az eljárást folytatva legvégül az a két pont marad, amelyik a megkettőzött éllel van összekötve. Ezt a két pontot lefedjük ezzel a két éllel.

Ezek után kimondhatjuk a következő tételt.

4.5. TÉTEL. Ha egy gráf izomorf egy  $n \times m$ -es négyzetrácssal, amely tartalmazza néhány átlóját, és az átlókkal erősített négyzetrács merev, akkor a gráf generikusan merev.

*Bizonyítás.* Megmutatjuk, hogy a néhány átlójával megerősített négyzetrács ha merev, akkor a hozzá tartozó  $C$  gráf generikusan merev. Bizonyítjuk, hogy  $C$  tetszőleges él megduplázásával felbontható két feszítőfára, ezért a Lovász és Yemini tétel értelmében generikusan merev. Mivel nem okoz félreértést a  $C$  gráf részeiről, mint az eredeti szerkezet részéről beszélünk. Amennyiben a megduplázott él átlós merevítő, úgy a merevítés gráfra alkalmazva a fedő tételt azt kapjuk, hogy az átlók (egyikük duplán) két részre bonthatók az egyik rész a vízszintes rácsrudak sorai között van és a vízszintes rácsrudakkal együtt biztosítja az egyik feszítőfa létezését, a másik rész a függőleges rácsrudakkal együtt biztosítja a másik feszítőfa létezését. Rövidebben fogalmazva az átlók egyik osztálya lefedi az oszlopokat a másik a sorokat. Így az egyik osztály a vízszintes rács rudakkal a másik a függőleges rács rudakkal alkot egy-egy feszítőfát. Ha a megduplázott él függőleges rács rúdnak felel meg, akkor tekintsük úgy, mintha a vele megegyező sorban levő egyik átlós merevítő lenne megduplázva. Ilyen merevítő van, mivel a rács eredetileg merev a feltétel szerint. Ha a megduplázott él vízszintes, akkor a vele megegyező oszlopban levő egyik átlós merevítőt duplázunk meg. Így a feszítőfák az előzőekhez hasonlóan jönnek létre.

A 4.5-ös tétel megfordítva nem igaz. Megadható olyan négyzetrács szerkezet átlós merevítőkkal amely nem merev, viszont a gráfja generikusan merev. Vegyük a  $3 \times 3$ -as négyzetrácsban a négy sarokban levő és a középső négyzetek egy-egy átlós merevítőjét. A kapott szerkezet nem merev. A generikusan merevségre vonatkozó 4.2-es illetve 4.3-as tételek következményeként viszont generikusan merev. Könnyen ellenőrizhető, hogy minden részgráfja eleget tesz a 4.2-es tétel egyenlőtlenségének.

A fedő tétel egy másik felhasználásaként adódik a következő:

4.6. TÉTEL. Ha egy háromosztályú gráf három páros részgráfja összefüggő, akkor a gráf generikusan merev a síkban.

*Bizonyítás.* A megduplázott él az egyik páros részgráfban van. A fedő tétel értelmében két élhalmaz keletkezik, melyek közül egyik lefedi az egyes osztályt, a másik a kettes osztályt.

Így az egyik élhalmaz a kettes és a hármas osztály közötti páros gráf egy feszítőfájával együtt adja az egyik feszítő fát, hasonlóan a másik élhalmaz az egyes és a hármas osztály közötti élek egy feszítőfájával adja a másik feszítőfát.

Biztonsági alkalmazása lehet a következő problémának: Melyek azok a gráfok vagy szerkezetek, amelyekből elhagyva egy élet vagy rudat a szerkezet továbbra is merev marad? Csak a speciális rácsokat tekintve, valamint feltéve, hogy az elhagyható él csak átlós merevítő lehet, a kérdés röviden megválaszolható. A merevítés gráf nem tartalmazhat egy elemű vágást, azaz olyan élt, amelyet törölve a merevítés gráfából, az komponensekre esne szét, az az kétszeresen élősszefüggő.

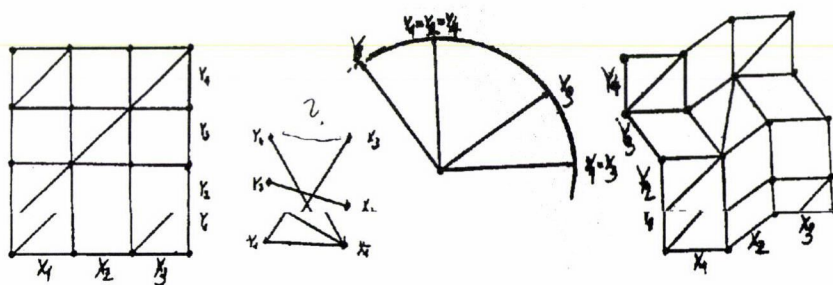
A cikk megírásához sok segítséget kaptam Recski Andrástól. Gáspár Zsolt és Tarnai Tibor értékes megjegyzései valamint a lektorok hasznos kiegészítései segítették a cikk pontosságát, és érthetőségét. Ezúton is köszönöm segítségüket, a Magyar Tudományért Alapítvány és az Országos Kutatási Alapprogramok (OTKA T 017 181) támogatását.

### IRODALOM

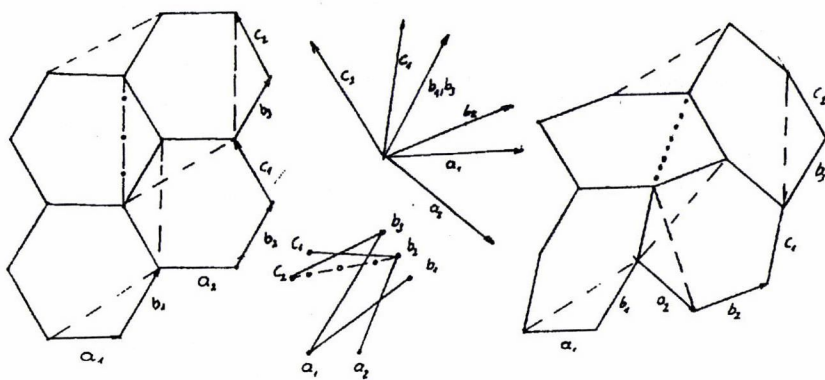
- [1] ASIMOV, L., ROTH, B., „Part II”, *J. Math. Anal. Appl.* **68** (1979), 171–190.
- [2] BOLKER, E.D., CRAPO, H., „Bracing rectangular frameworks I”, *SIAM J. Appl. Math.* **36**, No.3 (1979), 473–490.
- [3] LOVÁSZ, L., YEMINI, Y., „On the generic rigidity in the plane”, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **3** (1982), 91–98.
- [4] NAGY, GY., „Diagonal bracing of special cube grids”, *Acta Technica Acad. Sci. Hung.* **106** (1994), 265–273.
- [5] RECSKI, A., *Matroid Theory and its Application in Electric Network Theory and in Statics*, Akadémia Kiadó, Budapest és Springer, Berlin, 1989.

(Beérkezett: 1994. január 6.)

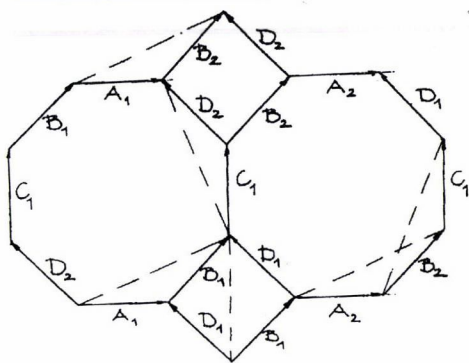
NAGY GYULA  
YBL MIKLÓS M. F.  
MATEMATIKA TANSZÉK  
1146 BUDAPEST, THÖKÖLY ÚT 74.



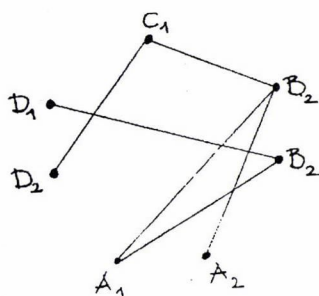
1. ábra

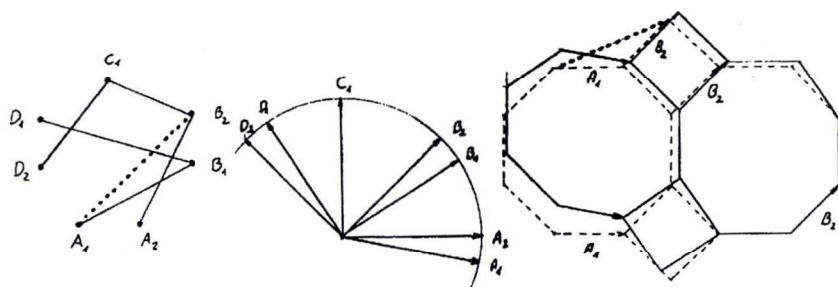


2. ábra

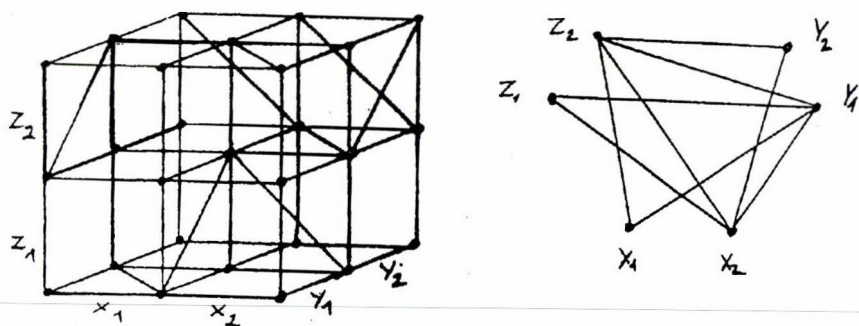


3. ábra

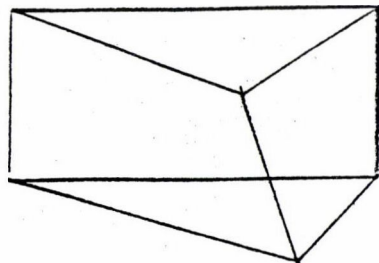
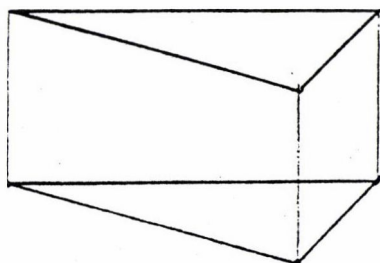




4. ábra



5. ábra



6. ábra

## THE RIGIDITY OF REGULAR GRID FRAMEWORK ON PLANE

GY. NAGY

One of the simplest structures in statics are the grid frameworks. In this note we give a new proof of Bolker-Crapo's theorem in section 2, and the special regular plane grid framework is characterized in section 3. We assume that the opposite edges of a special regular polygon grid are parallel during any motion of the vertices. To make the special regular grid to be rigid we use bracing elements along the shortest diagonals of the polygons. The rigidity of the generic „square” grid are proved in section 4 applying Lovász and Yemini theorem.

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11



# A DATALOG FUZZY KITERJESZTÉSE

ACHS ÁGNES ÉS KISS ATTILA

Pécs

Cikkünkben a deduktív adatbázisok alapvető nyelve, a Datalog — bizonytalan információk kezelésére vonatkozó — kiterjesztésével foglalkozunk. Bevezetjük a fuzzy Datalog nyelvet, definiáljuk a nyelv szintaktikáját és szemantikáját, valamint megadunk néhány kiértékelési stratégiát.

## 1. Bevezetés

Egy tudásbázis tényekből és következtetési szabályokból épül fel. A tények bizonyos ismereteket reprezentálnak, melyekből a szabályok segítségével következtethetünk újabb ismeretekre. A deduktív adatbázisok elméletében közismertek a Datalog-szerű nyelvek.

A Datalog Horn-klózek, azaz

$$A \leftarrow B_1, \dots, B_n$$

alakú szabályok halmaza, ahol  $A, B_i (i = 1, \dots, n)$  pozitív literálok. Az  $A \leftarrow$  alakú szabályokat tényeknek nevezzük.

Minden Datalog programhoz készíthető egy úgynevezett megelőzési gráf. A gráf csúcsai a programban szereplő közösleges predikátumok. A  $p$  predikátumból a  $q$  predikátumba, akkor vezet él, ha van olyan szabály, melynek feje  $q$  és törzsében szerepel  $p$ . Ha a gráf kört tartalmaz, akkor a program rekurzív.

A Datalog szabályok kiértékelésekor két utat követhetünk. Az egyik módszer szerint minden predikátumhoz meghatározunk egy relációt a tény-predikátumokhoz tartozó relációk segítségével. Rekurzív programok esetén egy Datalog egyenletrendszerhez jutunk, melyet iteratív módon oldhatunk meg. Ezt a módszert preferálja [U]. [CGT] a másik utat részesíti előnyben, amely szerint egy rákövetkezési operátort definiálhatunk, s ez alapján számolhatjuk ki az új tényeket. Mindkét megoldási algoritmus egy fixpontkeresés, és a legkisebb fixpontot eredményezi. Ez a fixpont egyúttal a Datalog program egyértelmű minimális modellje.

Nem ilyen egyszerű a helyzet, ha negációt is megengedünk, hiszen a negatív információk kezelése nehéz feladat.

A negatív adatok tömege jóval nagyobb, mint a pozitívaké, ezért csak a pozitívakat tároljuk, s a negatívakra következtetünk. Többféle következtetési mód is ismert, de mindegyik kapcsolódik valamilyen módon a zártvilág-feltételezéshez (CWA).

A CWA lényege, hogy ha egy tény logikailag nem következik egy klózhalmazból, akkor arra következtetünk, hogy a tény negáltja igaz, azaz ha  $C$  egy klózhalmaz és  $F$  alapliterál, akkor

$$C \models^{CWA} F \iff F \text{ pozitív és } C \models F, \text{ vagy } F \text{ negatív és } C \models \neg F$$

Ha a CWA elvet a közönséges Datalogra alkalmazzuk, akkor is tudunk negatív tényekre következtetni, de ezekből a negatív tényekből már nem határozhatunk meg újabbakat. Hogy tovább tudjunk belőlük következtetni, meg kell engednünk negatív literálok használatát a szabálytörzsben. Így jutunk a Datalog<sup>-</sup> nyelvhez.

A Datalog<sup>-</sup> programok kiértékeléséhez kétféle szemantikát szoktak értelmezni, az egyik a rétegzés, a másik az inflációs szemantika.

Rétegzéskor egyfajta rendezést vezetünk be a predikátumok között, ha az lehetséges, s a programokat ebben a sorrendben értékeli ki, vagyis a deklaratív szabályokhoz procedurális kiértékelés társul. Ha ebben a sorrendben végezzük el a kiértékelést, akkor egy negált predikátumra már csak akkor kerül sor, ha előbb minden pozitív előfordulási helyén kiértékeltek.

Az inflációs szemantika esetén nem kívánjuk meg a modell minimalitását, megelégszünk egy inflációs operátor (amely segítségével tényekből újabb tényekre következtethetünk) legkisebb fixpontjával, s ezt a fixpontot definiáljuk szemantikaként. Ez a szemantika „hatásosabb”, mint a rétegzés. Ez azt jelenti, hogy található olyan lekérdezés, amely kifejezhető az inflációs Datalog<sup>-</sup>-ban, de nem fejezhető ki a rétegzettben. ([CGT])

A bizonytalan információk kezelésére azonban nem alkalmas a klasszikus Datalog. A cikkben a bizonytalanság kezelésének egy lehetséges módját adjuk meg. A közönséges Datalog szabályokat kiegészítjük egy bizonytalansági szintet jelző értékkel és egy implikációs operátorral, amely segítségével következtetni tudunk a szabályfej bizonytalansági szintjére. A szabályokhoz és így módon a predikátumokhoz rendelt bizonytalansági szint azt mutatja meg, hogy az illető predikátum legalább milyen szinten teljesül. Az így kapott programnyelvet fuzzy Datalognak, vagy röviden fDATALOG-nak nevezzük.

## 2. A fuzzy Datalog

Mielőtt rátérnénk az fDATALOG ismertetésére, tisztázzunk néhány fogalmat!

*Term*-nek nevezünk egy változót, konstans vagy egy  $f(t_1, \dots, t_n)$  alakú kifejezést, ahol  $f$  függvényszimbólum és  $t_1, \dots, t_n$  termek. *Atom* egy  $p(\underline{t})$  alakú formula, ahol  $p$  egy  $n$  változós predikátumszimbólum és  $\underline{t}$  egy  $n$  elemű termsorozat. *Literál*-nak nevezünk egy atomot (pozitív literál) vagy a negáltját (negatív literál). A változó nélküli termet (atomot, literált) *alapterm*nek (alapatom, alapliterál) nevezzük.

Legyen  $D$  egy halmaz! A  $D$  fölötti  $F$  *fuzzy halmaz* egy  $F : D \rightarrow [0, 1]$  függvény. Jelölje  $\mathcal{F}(D)$  az összes  $D$  fölötti fuzzy halmazt. Ekkor  $F \in \mathcal{F}(D)$ . A fuzzy halmazokon a metszet és unió szokásos értelmezése a következő:

$$F \cup G(d) \stackrel{\text{def}}{=} \max(F(d), G(d))$$

$$F \cap G(d) \stackrel{\text{def}}{=} \min(F(d), G(d))$$

Fuzzy halmazokra vonatkozó rendezési relációt is értelmezhetünk:  $F \leq G$  akkor és csak akkor, ha  $F(d) \leq G(d) \forall d \in D$ . Mivel  $\mathcal{F}(D)$  minden részhalmazának létezik legkisebb felső, illetve legnagyobb alsó korlátja, ezért  $(\mathcal{F}(D), \leq)$  teljes háló.

A háló legnagyobb eleme:  $U : D \rightarrow [0, 1] : U(d) = 1 \forall d \in D$ .

A legkisebb elem:  $\emptyset : D \rightarrow [0, 1] : \emptyset(d) = 0 \forall d \in D$ .

A fuzzy halmazokat gyakran

$$F = \bigcup_{d \in D} (d, \alpha_d)$$

módon jelölik, ahol  $(d, \alpha_d) \in D \times [0, 1]$ .

A következtetések elvégzéséhez szükségünk van az *implikációs operátor* fogalmára.

Az implikációs operátorok megválasztásával és tulajdonságaival kapcsolatban sok vizsgálódás folyik. Ezekről a vizsgálatokról ad összefoglaló képet [DP]. A különböző implikációs operátorokat a normák és conormák segítségével értelmezik. Ezek a metszet és az unio műveletének a fuzzy halmazokra való kiterjesztései.

A következő táblázatban részletezés nélkül összefoglaljuk a leggyakoribb implikációs operátorokat:

jelölés	név	formula
$I_1(x, y)$	Gödel	1 ha $x \leq y$ y egyébként
$I_2(x, y)$	Lukasiewicz	1 ha $x \leq y$ $1 - x + y$ egyébként
$I_3(x, y)$	Goguen	1 ha $x \leq y$ $y/x$ egyébként
$I_4(x, y)$	Kleene-Dienes	$\max(1 - x, y)$
$I_5(x, y)$	Reichenbach	$1 - x - xy$
$I_6(x, y)$	Zadeh	$\max(1 - x, \min(x, y))$
$I_7(x, y)$	Gaines-Rescher	1 ha $x \leq y$ 0 egyébként

Ezek után térjünk rá az fDATALOG nyelv értelmezésére!

## 2.1. A fuzzy Datalog szintaktikája.

2.1. Definíció. fDATALOG szabály egy  $(r; I; \beta)$  hármas, ahol r egy

$$Q \leftarrow Q_1, \dots, Q_n \quad (n \geq 0)$$

alakú formula, Q atom (a szabály feje),  $Q_1, \dots, Q_n$  literálok (a szabály törzse), I egy implikációs operátor és  $\beta \in (0, 1]$  (a szabály bizonytalansági foka vagy szintje).

Az fDATALOG szabály biztonságos, ha

- a fejben előforduló összes változó szerepel a törzsben is;
- az összes olyan változó, amely negatív literálban szerepel, előfordul pozitív literálban is.

Egy fDATALOG program biztonságos fDATALOG szabályok véges halmaza. Az  $(A \leftarrow I; \beta)$  alakú szabályokat, ahol  $A$  alapatom, tényeknek nevezzük.

Egy  $P$  program *Herbrand univerzuma* ( $H_P$ ) a  $P$ -ben előforduló konstansokból és függvénszimbólumokból képzett összes lehetséges alapatom halmaza. A  $P$  *Herbrand bázisa* ( $B_P$ ) a  $P$ -ben előforduló predikátumszimbólumokból képzett összes lehetséges olyan alapatom halmaza, melynek argumentumai  $H_P$  elemei. Egy  $(r; I; \beta)$  szabály  $P$ -beli *alapelőfordulása* egy olyan szabály, amelyet úgy kapunk  $r$ -ből, hogy az összes  $r$ -beli  $X$  változót  $\Phi(X)$ -szel helyettesítjük, ahol  $\Phi$  az  $r$ -ben előforduló változók  $H_P$ -be való leképezése. Az  $(r; I; \beta)$  szabály összes alapelőfordulásának halmazát  $(ground(r); I; \beta)$ -val jelöljük. A  $P$  program alapelőfordulása:

$$ground(P) = \cup_{(r; I; \beta) \in P} (ground(r); I; \beta)$$

**2.2. Definíció.** Egy  $P$  program interpretációja  $B_P$  egy fuzzy részhalmaza:

$$N_P \in \mathcal{F}(B_P)$$

azaz  $N_P = \bigcup_{A \in B_P} (A, \alpha_A)$ .

A konjunkció és negáció szintjét a szokásos módon értelmezzük, azaz tetszőleges  $A_1, \dots, A_n$  alapatomok esetén:

$$\alpha_{A_1 \wedge \dots \wedge A_n} \stackrel{\text{def}}{=} \min(\alpha_{A_1}, \dots, \alpha_{A_n})$$

$$\alpha_{\neg A} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \alpha_A$$

**2.3. Definíció.** Egy interpretáció a  $P$  program modellje, ha minden

$$(A \leftarrow A_1, \dots, A_n; I; \beta) \in ground(P)$$

esetén

$$I(\alpha_{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}, \alpha_A) \geq \beta.$$

Az  $M$  legkisebb modell, ha bármely  $N$  modell esetén  $M \leq N$ .  $M$  minimális modell, ha nincs olyan  $N \neq M$  modell, hogy  $N \leq M$  teljesüljön.

Az egyszerűség kedvéért  $\alpha_{A_1 \wedge \dots \wedge A_n}$ -t  $\alpha_{\text{törzs}}$ -szel és  $\alpha_A$ -t  $\alpha_{\text{fej}}$ -jel jelöljük.

**MEGJEGYZÉS.** Az fDATALOG a közönséges Datalog általánosításának tekinthető, hiszen ha minden szabályhoz az  $I_7$ -tel jelölt, ún. Gaines-Rescher implikációs operátort és  $\beta = 1$  bizonytalansági szintet rendelünk, akkor Datalog szabályok halmazát kapjuk.

A matematikai logikában az igazság fogalmát két oldalról közelítjük meg, a modellelmélet és a bizonyításelmélet felől. Modellelméleti szempontból egy logikai formula akkor és csak akkor igaz tautológikusan, ha az összes lehetséges interpretációban igaz, vagyis ha a formula minden interpretációja modell. A bizonyításelméleti megközelítés szerint a formula akkor és csakis akkor tautológia, ha valamely axiómarendszerből adott szabályok szerint levezethető. A matematikai logika egyik fő kérdése a két megközelítés ekvivalenciájának bizonyítása.

Ugyanez a kérdés merül föl a logikai adatbázisok körében is. A következő fejezetben megadjuk az fDATALOG egy bizonyításelméleti megközelítését, és megvizsgáljuk, hogy ez a megközelítés ekvivalens-e a modellelméleti megközelítéssel. Ez azt jelenti, hogy megadjuk egy levezetési eljárást, melynek fixpontjáról belátjuk, hogy a vizsgált program modellje, vagyis hogy a két irányú megközelítés ekvivalens.

## 2.2. A fuzzy DATALOG szemantikája.

Két rákövetkezési transzformációt értelmezünk, egy determinisztikus és egy nemdeterminisztikus transzformációt. A determinisztikus transzformáció segítségével párhuzamosan értékeljük ki a program szabályait, míg nem determinisztikus esetben a szabályokat tetszőleges sorrendben, egyenként egymás után véve végezzük a következtetést. A két transzformációnak megfelelően kétféle szemantikák pozitív programok esetén megegyeznek, de negációt tartalmazó programoknál különböző eredményt adhatnak.

**2.4. Definíció.** A  $DT_P : \mathcal{F}(B_P) \rightarrow \mathcal{F}(B_P)$  és  $NT_P : \mathcal{F}(B_P) \rightarrow \mathcal{F}(B_P)$  rákövetkezési transzformációkat a következő módon értelmezzük:

$$DT_P(X) = \{\cup\{(A, \alpha_A)\} \mid (A \leftarrow A_1, \dots, A_n; I; \beta) \in \text{ground}(P), (|A_i|, \alpha_{A_i}) \in X, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_A = \max(0, \min\{\gamma \mid I(\alpha_{törzs}, \gamma) \geq \beta\})\} \cup X$$

és

$$NT_P(X) = \{(A, \alpha_A)\} \cup X \\ \text{ahol } (A \leftarrow A_1, \dots, A_n; I; \beta) \in \text{ground}(P), (|A_i|, \alpha_{A_i}) \in X, \quad 1 \leq i \leq n, \\ \alpha_A = \max(0, \min\{\gamma \mid I(\alpha_{törzs}, \gamma) \geq \beta\})$$

Itt  $|A_i|$ -val azt a  $p(\underline{c})$  atomot jelöljük, melyre  $A_i = p(\underline{c})$  vagy  $A_i = \neg p(\underline{c})$ ,  $p$  egy  $k$  argumentumú predikátumszimbólum és  $\underline{c}$   $k$  alaptermből álló lista.

**MEGJEGYZÉS.** Vegyük észre, hogy az  $NT_P$  transzformáció esetén az  $X$  halmaz csupán egy legfőbb elemű halmazzal bővül, míg a  $DT_P$  transzformáció során ez a bővülés sok elemet tartalmazhat.

A vizsgált implikációs operátorok körét le kell szűkítenünk, ugyanis nem minden  $I$  esetén létezik a második változó szerinti pseudo-inverz, azaz nem határozható meg tetszőleges  $\alpha_{törzs}$ ,  $\beta$ -hoz a kívánt  $\alpha_A$  érték.

Értelmezzük az úgynevezett bizonytalansági-szint függvényt:

**2.5. Definíció.** Az

$$f(I, \alpha, \beta) = \min(\{\gamma \mid I(\alpha, \gamma) \geq \beta\})$$

függvényt bizonytalansági-szint függvénynek nevezzük.

Egyszerű számolással ellenőrizhető a következő állítás:

**2.1. ÁLLÍTÁS.** Bármely  $I \in \{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_7\}$  esetén tetszőleges  $\alpha_{törzs}, \beta$  értékhez létezik az  $f(I_i, \alpha_{törzs}, \beta)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 7$ ) érték.

Az általunk vizsgált speciális implikációs operátorok esetén  $f(I, \alpha, \beta)$  a következő módon

határozható meg:

$$\begin{aligned} f(I_1, \alpha, \beta) &= \min(\alpha, \beta) \\ f(I_2, \alpha, \beta) &= \max(0, \alpha + \beta - 1) \\ f(I_3, \alpha, \beta) &= \alpha \cdot \beta \\ f(I_4, \alpha, \beta) &= \begin{cases} 0 & \alpha + \beta \leq 1 \\ \beta & \alpha + \beta \geq 1 \end{cases} \\ f(I_5, \alpha, \beta) &= \max(0, 1 + (\beta - 1)/\alpha), \quad \alpha \neq 0 \\ f(I_7, \alpha, \beta) &= \alpha \end{aligned}$$

$I = I_6$  esetén nem értelmezett minden  $\alpha, \beta$  esetén az  $f(I_6, \alpha, \beta)$  függvény.

Az  $I_6$ -ra vonatkozó állítás belátásához elég példaként az  $\alpha_{\text{törzs}} = 0.6, \beta = 0.7$  értékeket tekinteni, ekkor ugyanis tetszőleges  $\gamma$  esetén  $0.4 \leq I_6(\alpha_{\text{törzs}}, \gamma) \leq 0.6$ , vagyis nincs olyan  $\gamma$  érték, melyre  $I(\alpha_{\text{törzs}}, \gamma) \geq \beta$  teljesülne.

A továbbiakban feltételezzük az  $I$  implikációs operátor pseudo-invertálhatóságát, vagyis azt, hogy tetszőleges  $\alpha_{\text{törzs}}, \beta$ -hoz meghatározható a kívánt  $\alpha_A = f(I, \alpha_{\text{törzs}}, \beta)$  érték. A tényhalmazból kiindulva egy tetszőleges transzformáció egymás utáni alkalmazásával (vagyis a transzformáció hatványainak meghatározásával) értelmezünk egy halmazsorozatot:

Tetszőleges  $T : \mathcal{F}(B(P)) \rightarrow \mathcal{F}(B_P)$  transzformáció esetén legyen

$$\begin{aligned} T_0 &= \{\cup\{(A, \alpha_A) \mid (A \leftarrow; I; \beta) \in \text{ground}(P), \alpha_A = \min\{\gamma \mid I(1, \gamma) \geq \beta\}\} \cup \\ &\quad \{(A, 0) \mid \exists (B \leftarrow \dots \neg A \dots; I; \beta) \in \text{ground}(P)\}\}, \end{aligned}$$

és legyen

$$T_1 = T(T_0)$$

...

$$T_n = T(T_{n-1})$$

...

$T_\delta = a \{T_\gamma \mid \gamma < \delta\}$  legkisebb felső korlátja, ha  $\delta$  egy határérték rendszám.

A kiindulással használt  $T_0$  halmazban a ténypredikátumok egy-egy bizonytalansági szinttel együtt szerepelnek. Ezeket az  $\alpha_A$  értékeket a tények bizonytalansági mértékéből számoljuk ki. Célszerű lenne olyan implikációs operátorokat használni, amelyek esetén az  $(A \leftarrow; I; \beta)$  tényekre vonatkozó bizonytalansági szint és a predikátumhoz kiszámolt bizonytalansági szint megegyezik, vagyis  $\beta = \alpha_A$  teljesül. Ennek feltétele, hogy az implikációs operátor kielégítse az  $I(1, y) = y$  összefüggést. Egyszerű számolással belátható, hogy az  $I_k, k = 1, \dots, 6$  operátorok elegendő tesznek ennek a feltételnek, az  $I_7$  azonban nem. Ez utóbbi esetben a kiszámított bizonytalansági szint értéke  $\beta$ -tól függetlenül  $\alpha_A = 1$ .

2.2. **ÁLLÍTÁS.** A  $DT_P$  transzformációknak van fixpontja, vagyis létezik olyan  $X \in \mathcal{F}(B_P)$ , melyre  $DT_P(X) = X$ . Az  $NT_P$  transzformációnak van fixpontja, vagyis létezik olyan  $X \in \mathcal{F}(B_P)$ , melyre az  $X$  halmaz bármely szabályát is választva  $NT_P(X) = X$ . Ha  $P$  pozitív, akkor a két fixpont megegyezik, és ez a közös érték a legkisebb fixpont.

*Bizonyítás.* Többek között [CGT], [GS] bizonyítja, hogy egy  $L$  teljes hálón értelmezett inflációs  $T: L \rightarrow L$  transzformációnak létezik fixpontja. ( $T$  inflációs, ha  $X \leq T(X)$  minden  $X \in L$  esetén.) Ha  $T$  monoton ( $T(X) \leq T(Y)$ , ha  $X \leq Y$ ), akkor  $T$ -nek van legkisebb fixpontja (ld. [L]).

Mivel  $DT_P$  és  $NT_P$  inflációs transzformációk és  $\mathcal{F}(B_P)$  teljes háló, ezért mindkettőnek létezik inflációs fixpontja.

Ha  $P$  pozitív, akkor mindkét transzformáció monoton, s mindkettőnek ugyanaz a fixpontja. A monoton transzformációkra vonatkozó fixponttétel szerint ez a legkisebb fixpont.

Ezeket a fixpontokat  $\text{lfp}(DT_P)$ -vel és  $\text{lfp}(NT_P)$ -vel jelöljük.

Belátjuk, hogy az így kapott fixpontok a  $P$  modelljei, így segítségükkel értelmezni tudjuk egy program jelentését.

2.1. **TÉTEL.**  $\text{lfp}(DT_P)$  és  $\text{lfp}(NT_P)$  a  $P$  modelljei.

*Bizonyítás.*  $T = DT_P$  és  $T = NT_P$  esetén  $\text{ground}(P)$ -ben a következő alakú szabályok vannak:

- a/  $(A \leftarrow I; \beta)$
- b/  $(A \leftarrow A_1, \dots, A_n; I; \beta); (A, \alpha_A) \in \text{lfp}(T) \text{ és } (|A_i|, \alpha_{A_i}) \in \text{lfp}(T), \quad 1 \leq i \leq n.$
- c/  $(A \leftarrow A_1, \dots, A_n; I; \beta); \exists i : (|A_i|, \alpha_{A_i}) \notin \text{lfp}(T).$

Az a, b esetben  $\alpha_A$  konstrukciója miatt  $I(\alpha_{\text{törzs}}, \alpha_A) \geq \beta$  teljesül.

c esetén  $T_0$  konstrukciójából adódóan  $A_i$  nem negatív, így  $\alpha_{A_i} = 0$  ezért  $\alpha_{\text{törzs}} = 0$  így  $I(\alpha_{\text{törzs}}, \alpha_A) = 1 \geq \beta$ .

Vagyis  $\text{lfp}(T)$  modell.

Ezek után definiálhatjuk az fDATALOG programok szemantikáját.

2.6. *Definíció.*  $\text{lfp}(DT_P)$  az fDATALOG  $P$  program determinisztikus szemantikája.

$\text{lfp}(NT_P)$  az fDATALOG  $P$  program nemdeterminisztikus szemantikája.

2.3. **ÁLLÍTÁS.** Függvény-és negációmentes fDATALOG esetén a két szemantika megegyezik.

*Bizonyítás.* Mivel ebben az esetben a két transzformáció fixpontja megegyezik, ezért a két szemantika is.

2.4. **ÁLLÍTÁS.** Negációmentes fDATALOG esetén  $\text{lfp}(DT_P) (= \text{lfp}(NT_P))$  a legkisebb modell.

*Bizonyítás.* Közöséges pozitív Datalog program esetén a legkisebb fixpont egyúttal legkisebb modell is ([CGT, U]). Fuzzy esetben esetleg abból adódhatna probléma, hogy a fixpontszámítás során egy későbbi lépésben alacsonyabb fokszámot rendelhetnénk egy szabályfejhez, mint egy korábbi lépésben, a transzformációk definíciója alapján azonban a

magasabb értéket kellene elfogadnunk. De ilyen eset csak negációt tartalmazó programok körében fordulhat elő. Így az állítás igaz.

Belátjuk, hogy függvénymentes pozitív programok és bizonyos tulajdonsággal rendelkező implikációs operátorok esetén létezik algoritmus a legkisebb modell meghatározására, azaz a fixpontszámítási eljárás véges sok lépésben befejeződik. Arra is mutatunk példát, hogy van olyan implikációs operátor, amely alkalmazásakor előfordulhat, hogy a program nem terminál véges lépésszámon belül.

2.5. ÁLLÍTÁS. Tegyük fel, hogy az  $I$  implikációs operátorhoz tartozó  $f(I, \alpha, \beta)$  bizonytalansági-szint függvényre teljesül az  $f(I, \alpha, \beta) \leq \alpha, \forall \alpha \in [0, 1]$  feltétel. Ekkor minden negáció- és függvénymentes  $f\text{DATALOG } P$  programhoz létezik olyan  $n$ , melyre  $T = DT_P$  ( $T = NT_P$ ) esetén  $T_n = T_{n+1} = \dots = \text{lfp}(T)$

*Bizonyítás.* Mivel  $P$  véges, ezért a kapott fixpontban csak véges sok alapatom szerepelhet. A bizonytalansági-szint függvény előírt tulajdonsága miatt az sem fordulhat elő, hogy egy későbbi lépés során ugyanaz az alapatom magasabb fokszámmal kerüljön be a fixpontba. Emiatt a transzformáció véges sok lépésben eléri a fixpontját.

Könnyen ellenőrizhető a következő állítás:

2.6. ÁLLÍTÁS. Az  $I_1, I_2, I_3, I_7$  operátorok kielégítik a 2.5. állításban megfogalmazott feltételt.

2.7. ÁLLÍTÁS. A fixpontszámoló algoritmus az  $I_4$  operátor alkalmazásakor is véges sok lépésben terminál.

*Bizonyítás.* Bár az operátor nem tesz eleget a 2.5. állítás feltételének, de mivel  $f(I_4, \alpha, \beta)$  csak 0 és  $\beta$  értéket vehet fel, ezért a fokszámok ebben az esetben sem vehetnek fel végtelen sok különböző értéket.

2.8. ÁLLÍTÁS. Az  $I_5$  operátor alkalmazása esetén megadható olyan szabály, hogy a program csak végtelen sok lépésben terminál.

*Bizonyítás.* Az  $f(I_5, \alpha, \beta) = \max(0, 1 + (\beta - 1)/\alpha)$  függvény  $\alpha + \beta \geq 1$  esetén szigorúan monoton növekvő, és  $\beta > 0.75$  esetén van olyan  $\alpha$ , melyre  $f(I_5, \alpha, \beta) \geq \alpha$ , ezért ilyen szintekkel rendelkező rekurzív szabály esetén előfordulhat, hogy a szabály újbóli alkalmazásakor az előzőnél nagyobb szintértékkal kerül be a megoldáshalmazba a fejpredikátumhoz tartozó alapatom, így a fixpont csak végtelen sok lépéssel érhető el.

2.1. PÉLDA. A

$$p(a) \leftarrow I_1; 0.6$$

$$p(a) \leftarrow p(a); I_5; 0.8$$

program nem terminál véges sok lépésben. A  $p(a)$  alapatomhoz tartozó bizonytalansági szint értékeire egy szigorúan monoton növekvő sorozatot kapunk.

A következő példa mutatja, hogy negációt tartalmazó programok esetén a két szemantika eltér egymástól.



## 2.2. PÉLDA.

1.  $r(a) \leftarrow I_1; 0.8$
2.  $p(x) \leftarrow r(x), \neg q(x); I_1; 0.6$
3.  $q(x) \leftarrow r(x); I_1; 0.5$
4.  $p(x) \leftarrow q(x); I_1; 0.8$

Ekkor

$$\text{lfp}(DT_P) = \{(r(a), 0.8); (p(a), 0.6); (q(a), 0.5)\}$$

Nemdeterminisztikus kiértékeléskor különböző megoldásokat kaphatunk, hiszen az függ a kiértékelendő szabályok sorrendjétől.

Ha a kiértékelendő szabályok sorrendje 1.,2.,3.,4. akkor

$$\text{lfp}(NT_P) = \{(r(a), 0.8); (p(a), 0.6); (q(a), 0.5)\},$$

míg 1.,3.,2.,4.-es sorrendben

$$\text{lfp}(NT_P) = \{(r(a), 0.8); (p(a), 0.5); (q(a), 0.5)\}.$$

Mint a példából is láthatjuk,  $\text{lfp}(DT_P)$  nem mindig minimális modell, azaz a determinisztikus szemantikát alkalmazva a kapott fixpont nem minden esetben adja a kívánt minimális modellt. Nem determinisztikus esetben azonban bizonyos feltételek mellett biztosítható a minimalitás. Ez a feltétel a rétegezés. A rétegezés meghatároz egy kiértékelési sorrendet, amelyben a negatív literálokat értékeljük ki először, s ily módon minimális modellt kapunk.

A rétegezéshez előbb a függőségi gráf fogalmát kell megadnunk. Ez egy olyan irányított gráf, melynek csúcsai a  $P$  predikátumai. Egy  $p$  predikátumból akkor vezet el egy  $q$  predikátumba, ha  $P$ -nek van olyan szabálya, melynek törzsében  $p$  vagy  $\neg p$  szerepel, és amelynek fej-predikátuma  $q$ .

Egy program rekurzív, ha függőségi gráfja egy vagy több kört tartalmaz. Az összes olyan predikátum, amely rajta van egy vagy több körön, rekurzív predikátum. A körmentes függőségi gráffal rendelkező programok rekurziómentesek.

Egy program rétegzett, ha az összes olyan esetben, amikor egy szabály fej-predikátuma  $p$ , és a törzs negált literálja  $\neg q$ , a függőségi gráfban nincs út  $p$ -ből  $q$ -ba.

Egy  $P$  program rétegzése a  $P$  predikátumszimbólumainak olyan  $P_1, \dots, P_n$  részhalmazokra való partíciója, melyre teljesülnek a következő feltételek:

- a/ ha  $p \in P_i$ ,  $q \in P_j$  és nincs el  $q$ -ból  $p$ -be, akkor  $i \geq j$ .
- b/ ha  $p \in P_i$ ,  $q \in P_j$  és van olyan  $p$  fejpredikátumú szabály, melynek törzse tartalmazza  $\neg q$ -t, akkor  $i > j$ .

A  $P_1, \dots, P_n$  halmazokat rétegnek nevezzük.

Egy  $P$  program többféle módon is rétegezhető. Egy rétegzés meghatároz egy kiértékelési sorrendet. Először azokat a szabályokat értékeljük ki, melyek fejpredikátumai  $P_1$ -ben vannak, azután a  $P_2$ -ben levőket, és így tovább.

Egy programot rétegezhetőnek nevezünk, ha megadható hozzá rétegzés. Nagyon egyszerű rétegzési algoritmust ad meg [CGT] és [U].

Legyen  $P$  egy rétegzett  $f\text{DATALOG}$  program  $P_1, \dots, P_n$  rétegzéssel. Jelölje  $P_i^*$  a  $P_i$  rétegzéshez tartozó összes  $P$ -beli szabály halmazát, azaz az összes olyan szabály halmazát, melynek fejpredikátuma  $P_i$ -ben van.

Legyen

$$L_1 = \text{lfp}(\text{NT}_{P_1^*}),$$

ahol a fixpontszámolási eljárás kiindulópontja a korábban definiált  $T_0$ .

Legyen

$$L_2 = \text{lfp}(\text{NT}_{P_2^*}),$$

ahol a számolás kiindulópontja az előbb kapott  $L_1$ ,

...

$$L_n = \text{lfp}(\text{NT}_{P_n^*}),$$

ahol a kiindulópont  $L_{n-1}$ .

Más szóval először kiszámítjuk a  $P$  első rétegéhez tartozó  $L_1$  fixpontot. Ezen fixpont meghatározása után léphetünk a következő rétegekre.

MEGJEGYZÉS.

$$\text{lfp}(\text{NT}_{P_i^*}) = \text{lfp}(\text{DT}_{P_i^*})$$

Indukcióval belátjuk, hogy  $L_n$  a  $P$  minimális modellje. Ehhez szükségünk van a következő lemmára.

**2.1. LEMMA.** Legyen  $P$  olyan  $f\text{DATALOG}$  program, amelyben egyetlen negált törzs-predikátumhoz sincs — a tények esetleges kivételével — olyan szabály, melynek fejpredikátuma ugyanez a predikátum lenne. Ekkor  $P$ -nek van legkisebb modellje:  $L = \text{lfp}(\text{NT}_P) (= \text{lfp}(\text{DT}_P))$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $p$  egy negált predikátum  $P$  egy szabálytörzsében. Mivel nincsen egyetlen  $p$ -re vonatkozó új szabály sem, ezért a számítás alatt  $p$  bizonytalansági foka sohasem változik. Ilyen  $P$ -re  $\text{NT}_P$  (vagy  $\text{DT}_P$ ) monoton, ezért  $\text{lfp}(\text{NT}_P)$  a  $P$  legkisebb modellje.

A lemma szerint  $L_1$   $P_1^*$  legkisebb fixpontja. Általában  $L_i$   $P_i^*$  legkisebb fixpontja, mivel  $P$  rétegzése miatt az  $i$ -edik réteg összes negatív literálja egy alacsonyabb szintű réteg predikátumához tartozik. Így nincs olyan  $P_i^*$ -beli szabály, melynek fej-predikátuma ez a predikátum lenne. Ily módon igaz a következő tétel:

**2.2. TÉTEL.** Ha  $P$  rétegzett  $f\text{DATALOG}$  program, akkor  $L_n$  a  $P$  minimális fixpontja.

**2.9. ÁLLÍTÁS.** Rétegzett  $f\text{DATALOG}$   $P$  program esetén létezik olyan kiértékelési sorrend, amelyben  $\text{lfp}(\text{NT}_P)$  a  $P$  minimális modellje.

*Bizonyítás.* A fenti konstrukció megadja ezt a sorrendet. Ilyen sorrendben  $L_n = \text{lfp}(\text{NT}_P)$ .

### 3. Kiértékelési stratégiák

Egy fDATALOG programot különböző stratégiákkal értékelhetünk ki. Ha a tényekből kiindulva az adott szabályok alkalmazásával következtetünk az összes előállítható tényre, vagyis meghatározzuk a determinisztikus (nem determinisztikus) transzformáció fixpontját, akkor bottom-up következtetésről beszélünk.

Sokszor előfordulhat azonban, hogy nincs szükség a teljes kiértékelésre, hiszen egy konkrét kérdésre keressük a választ, el akarjuk dönteni egy predikátum (predikátumok) igaz vagy hamis voltát, illetve bizonytalansági fokát, vagy meg akarjuk tudni, hogy egy predikátum milyen értékek mellett igaz, vagy hamis, milyen értékek mellett igaz legalább  $\beta$  szinten, vagy milyen értékek esetén milyen szinten igaz. Ez azt jelenti, hogy egy cél ismeretében elég „célirányosan” végezni a kiértékelést, vagyis elég csak a cél eléréséhez szükséges szabályokat, tényeket figyelembe venni. Azt a fajta kiértékelési stratégiát, amikor a célból kiindulva a megfelelő szabályok alkalmazásával a tények felé következtetve értékeljük ki a szabályokat, top-down kiértékelésnek nevezzük.

A következőkben tárgyalt módszerek mindegyike függvénymentes esetre vonatkozik, bár legtöbbjük általánosítható függvényszimbólumokat tartalmazó programokra is.

#### 3.1. Bottom-up kiértékelés.

A továbbiakban az egyszerűbb jelölésmód kedvéért a rákövetkezési transzformációkat  $T_P$ -vel jelölöm. Ez nem okozhat zavart, hiszen negációmentes programok esetén a két transzformáció fixpontja megegyezik, negációt tartalmazó esetben pedig a továbbiakban csak a rétegezhető programokról lesz szó és ezekre a nem determinisztikus transzformációt alkalmaztuk.

A fixpontszámítás gyakorlatilag egy iterációs eljárás, melynek algoritmusa a következő:

#### 3.1. ALGORITMUS.

```

Procedure bottom-up
  régi :=  $T_0$ 
  új :=  $T_P(T_0)$ 
  while régi  $\neq$  új do
    régi := új
    új :=  $T_P(\text{rég})$ 
  endwhile
endprocedure

```

A fixpontszámítási algoritmus hátránya, hogy a számolás során sokszor fölöslegesen újra és újra kiértékeli ugyanazokat a szabályokat, így ismételten előállítja ugyanazokat az alapatomokat. Emiatt célszerű oly módon egyszerűsíteni a számolást, hogy a már kiértékelt szabályt ne vegyük ismételten figyelembe akkor, ha nem várhatunk tőle újabb eredményt. Az, hogy egy szabály adhat-e újabb eredményt, azon múlik, hogy a szabály fej-predikátumához milyen hosszú út vezet a függőségi gráfban. Ha a szabály rekurzív, vagyis ha a függőségi gráfban a fej-predikátumhoz vezető út kört tartalmaz, akkor a szabály nem hagyható el az algoritmus terminálása, vagyis a fixpont elérése előtt. Ha azonban a fej-predikátumhoz vezető út körmentes, akkor a szabály esetleg a terminálás előtt is elhagyható.

Ahhoz, hogy meg tudjuk állapítani, hogy egy szabály hanyadik lépésben hagyható el, minden szabályhoz hozzárendelünk egy számértéket, mégpedig a függőségi gráfban az illető szabály fej-predikátumához vezető maximális hosszúságú út hosszát. Ha az algoritmus túlhaladta ezt a lépésszámot, akkor a számítási eljárás során ez a szabály már nem ad új eredményt, vagyis elhagyható. Precízebben:

### 3.2. Módosított bottom-up kiértékelés.

Legyen  $P = \cup\{(r; I; \beta)\}$ . Defináljuk a  $h : P \rightarrow N$  függvényt a következőképpen:

$$h(r; I; \beta) = \begin{cases} n & \text{ahol } n \text{ a függőségi gráfban a fej-predikátumhoz vezető} \\ & \text{leghosszabb körmentes út hossza} \\ \infty & \text{ha a fej-predikátumhoz vezető út tartalmaz kört} \end{cases}$$

Értelmezzük a  $T'_n = T_{P'_n}(T_{n-1})$  sorozatot, ahol

$$P'_n = P - \{(r; I; \beta) | h(r; I; \beta) < n\}$$

A  $T'_n$  sorozatnak létezik határértéke, azaz

3.1. ÁLLÍTÁS. *Negáció- és függvénymentes P program esetén  $\exists m \in N : T'_m = T'_{m+1} = \dots = T'_\infty$ . Ilyen m-re vezessük be a  $T'_m = T'(P)$  jelölést.*

*Bizonyítás.* Beláttuk, hogy az  $I_1, I_2, I_3, I_4, I_7$  operátorok esetén a  $T_n$  sorozat véges sok lépésben eléri a fixpontját. (2.5., 2.6., 2.7. állítás). Mivel a  $T'_n$  sorozat részsorozata a  $T_n$  sorozatnak, ezért  $T'_n$  is véges sok lépésben eléri a fixpontját.

3.2. ÁLLÍTÁS. *Negáció- és függvénymentes fDATALOG programok esetén  $\text{lfp}(T_P) = T'(P)$ .*

*Bizonyítás.*  $T'(P)$  konstrukciójából adódóan  $T'(P) \subseteq \text{lfp}(T_P)$ .

A fordított tartalmazás belátásához tekintsünk egy tetszőleges  $(A, \alpha_A) \in \text{lfp}(T_P)$  elemet. Ekkor van olyan  $(r; I; \beta) \in P$ , melyre  $(A \leftarrow A_1, \dots, A_n; I; \beta) \in \text{ground}(r)$ . Legyen  $h(r; I; \beta) = k$ . Ekkor  $(r; I; \beta) \in P'_k$ , így  $(A, \alpha_A) \in T'_k \subseteq T'(P)$ .

MEGJEGYZÉS. Gyakorlati megvalósításában kört tartalmazó út esetén  $h(r; I; \beta) = kc^n$  módon értelmezhető.

A módosított bottom-up kiértékelés algoritmus:

### 3.2. ALGORITMUS.

Procedure kiértékel

```

k := 1
régí := T0
új := TP(T0)
while régí ≠ új do
    k := k+1
    régí := új
    P := P - {(r; I; β) | h(r; I; β) < k}
    új := TP(régí)
endwhile
endprocedure

```

### 3.3. Módosított bottom-up kiértékelés rétegzett fDATALOG esetén.

Az előzőekben ismertetett kiértékelés rétegzett fDATALOG esetén is alkalmazható. Itt rétegenként végezhetjük a kiértékelést, vagyis:

Legyen  $P$  egy rétegzett fDATALOG program  $P_1, \dots, P_n$  rétegzéssel. Jelölje  $P_i^*$  a  $P_i$  réteghez tartozó összes  $P$ -beli szabály halmazát, azaz az összes olyan szabály halmazát, melynek fejpredikátuma  $P_i$ -ben van.

Legyen

$$L_i = \text{lfp}(T_{P_i^*}),$$

ahol a fixpontszámolási eljárás kiindulópontja a korábban meghatározott  $L_{i-1}$  és  $T_{P_i^*} = NT_{P_i^*} = DT_{P_i^*}$ . Mivel  $P$  rétegzése miatt az  $i$ -edik réteg összes negatív literálja egy alacsonyabb szintű réteg predikátumához tartozik, ezért  $P_i^*$  kiértékelése megegyezik egy negációmentes program kiértékelésével, így igaz a következő állítás:

**3.3. ÁLLÍTÁS.**  $L_i$  meghatározható az előbbieken definiált módosított bottom-up algoritmussal, vagyis  $L_i = T'(P_i^*)$ .

### 3.4. Top-down kiértékelés.

Sokszor előfordulhat, hogy nincs szükség a teljes kiértékelésre, hiszen csak konkrét kérdésre keressük a választ, és nem akarjuk meghatározni a program modelljét képező összes lehetséges alapot. Ily módon az fDATALOG program kiegészíthető egy célhalmazzal, s feladatunk a célhalmaznak megfelelő alapotomok meghatározása lesz.

Célnek egy  $(Q, \alpha)$  párt nevezünk, ahol  $Q$  atom,  $\alpha$  pedig az atom bizonytalansági szintje.  $Q$  tartalmazhat változókat is, és  $\alpha$  is lehet változó vagy konstans. A célhalmazzal kibővített fDATALOG programot *lekérdezésnek* nevezzük. Egy lekérdezés kiértékelése a célhalmaz összes elemének meghatározását jelenti egymástól független sorrendben.

Egy célt részcélokra bontással tudunk meghatározni. Ez azt jelenti, hogy kiválasztjuk az összes olyan szabályt, melynek fej-predikátuma illeszthető az adott cél-predikátummal, majd a szabálytörzsekben szereplő predikátumokat részcéloknak tekintve folytatjuk a kiértékelést, amíg el nem jutunk a tényekhez. Az ilyen irányú kiértékelést nevezzük top-down kiértékelésnek.

A továbbiakban ezt a fajta kiértékelési módot részletezzük. A kiértékelési stratégiába egy kis „heurisztikát” is beépítünk, vagyis a bizonytalansági szintek és egyéb megfontolások figyelembe vételével megadunk egy célszerű kiértékelési sorrendet.

A precíz megfogalmazáshoz szükségünk van néhány fogalom tisztázására.

**3.1. Definíció.** Egy  $\Theta$  helyettesítés  $x_i|t_i$  alakú helyettesítési komponensek  $\{x_1|t_1, \dots, x_n|t_n\}$  véges halmaza, ahol  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) egymástól különböző változók, és  $t_i \neq x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) term. Az  $x_1, \dots, x_n$  változók halmazát a  $\Theta$  értelmezési tartományának nevezzük. Ha az összes  $t_i$  term konstans, akkor  $\Theta$ -t alaphelyettesítésnek nevezzük. Az üres helyettesítést  $\varepsilon$ -nal jelöljük.

Ha  $\Theta$  helyettesítés és  $t$  term, akkor  $t\Theta$  jelöli a következőképpen értelmezett termet:

$$t\Theta = \begin{cases} t_i & \text{ha } t|t_i \in \Theta \\ t & \text{egyébként} \end{cases}$$

Ha  $L$  literál, akkor  $L\Theta$  jelöli azt a literált, melyet úgy kapunk  $L$ -ből, hogy szimultán helyettesítjük az  $L$ -ben előforduló összes  $x_i$  változót a megfelelő  $t_i$  termmel, ha  $x_i|t_i$  eleme  $\Theta$ -nak.  $L\Theta$ -t az  $L$  egy példányának nevezzük.

Ha például  $L = \neg p(a, x, y, b)$  és  $\Theta = \{x|c, y|x\}$ , akkor  $L\Theta = \neg p(a, c, x, b)$ .

Ha  $(r; I; \beta)$  egy  $f$ DATALOG szabály, akkor  $(r\Theta; I; \beta)$  jelöli azt a szabályt, melyet úgy kapunk, hogy az eredeti szabály összes literáljára szimultán alkalmazzuk a  $\Theta$  helyettesítést, és a szabálytörzsben a helyettesítés után esetleg többszörösen szereplő atomokat egyszeres multiplicitással tekintjük.

**3.2. Definíció.** Legyen  $\Theta = \{x_1|t_1, \dots, x_n|t_n\}$  és  $\sigma = \{y_1|u_1, \dots, y_m|u_m\}$  két helyettesítés. A  $\Theta$  és  $\sigma$  kompozíciója az a  $\Theta\sigma = \{x_1|t_1\sigma, \dots, x_n|t_n\sigma, y_1|u_1, \dots, y_m|u_m\}$  halmaz, amelyből elhagyjuk az  $z|z$  alakú komponenseket és mindazokat a komponenseket, melyekre  $y_i = x_j$  teljesül valamely  $j$ -re.

A  $\Theta\sigma$  kompozíciót az  $(r; I; \beta)$  szabályra alkalmazva ugyanarra az eredményre jutunk, mintha először a  $\Theta$  helyettesítést alkalmaznánk, majd a kapott  $(r\Theta; I; \beta)$  példányra a  $\sigma$ -t.

**3.3. Definíció.** Ha egy  $L$ ,  $M$  literálpárhoz létezik olyan  $\Theta$  helyettesítés, melyre  $L\Theta = M\Theta$ , akkor azt mondjuk, hogy  $L$  és  $M$  egyesíthető, és a  $\Theta$  helyettesítést egységesítő helyettesítésnek nevezzük. Legyen  $\Theta$  és  $\lambda$  két helyettesítés. Azt mondjuk, hogy  $\Theta$  általánosabb, mint  $\lambda$ , ha létezik olyan  $\sigma$  helyettesítés, melyre  $\Theta\sigma = \lambda$ . Legyen  $L$  és  $M$  két literál. Az  $L$  és  $M$  legáltalánosabb egységesítője olyan egységesítő helyettesítés, amely általánosabb a többinél. Az  $L$  és  $M$  legáltalánosabb egységesítőjét  $\text{lge}(L, M)$ -mel fogom jelölni.

A legáltalánosabb egységesítő fogalmát függvényszimbólumokat tartalmazó logikai kifejezések egységesítésére vezették be, s meghatározására különböző algoritmusok ismeretesek ( $[P]$ ,  $[U]$ ). Mivel függvénymentes  $f$ DATALOG-gal szeretnék foglalkozni, ezért célszerű megadni egy jóval egyszerűbb, függvénymentes atomok egységesítésére szolgáló algoritmust.

Legyen  $L = p(t_1, \dots, t_n)$  és  $M = p'(t'_1, \dots, t'_m)$  két literál. Az  $\text{lge}(L, M)$  meghatározására szolgáló függvényeljárás vagy megadja  $L$  és  $M$  legáltalánosabb  $\Theta$  egységesítőjét, vagy jelzi, ha az nem létezik. Az egységesítés végrehajthatóságához nyilvánvalóan elengedhetetlen, hogy  $p = p'$  és  $n = m$  teljesüljön.

### 3.3. ALGORITMUS.

Function  $\text{lge}(L, M)$

if  $p \neq p'$  or  $n \neq m$  then  $L$  és  $M$  nem egységesíthető

else

$\Theta := \varepsilon$

$k := 1$

egységesíthető := igaz

while  $k \leq n$  and egységesíthető do

if  $t_i\Theta \neq t'_i\Theta$

then if  $t'_i\Theta$  változó

then  $\Theta := \Theta\{t'_i\Theta|t_i\Theta\}$

else if  $t_i\Theta$  változó

then  $\Theta := \Theta\{t_i\Theta|t'_i\Theta\}$

```

else egységesíthető := hamis endif
endif
endif
k := k + 1
endwhile
if egységesíthető then lge(L, M) =  $\Theta$  else L és M nem egységesíthető
endif
endfunction

```

Az algoritmusból is látszik, hogy  $\text{lge}(L, M) \neq \text{lge}(M, L)$ . Erre az aszimmetriára különösen vigyáznunk kell a top-down kiértékelésnél.

A továbbiakhoz szükségünk lesz még egy helyettesítés vetületének és két helyettesítés összekapcsolásának fogalmára.

**3.4. Definíció.** A  $\Theta = \{x_1|t_1), \dots, x_n|t_n\}$  helyettesítés  $H = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$  halmazra vonatkozó vetülete a  $\Theta_H = \{x_{i_1}|t_{i_1}, \dots, x_{i_k}|t_{i_k}\}$  helyettesítés.

**3.5. Definíció.** Legyen  $\Theta = \{x_1|t_1), \dots, x_n|t_n\}$  és  $\sigma = \{y_1|u_1), \dots, y_m|u_m\}$  két helyettesítés! Ha minden olyan  $x_i|t_i, y_j|u_j$  párra, amelyre  $x_i = y_j$  igaz, teljesül, hogy  $t_i = u_j$ , akkor a  $\Theta$  és  $\sigma$  összekapcsolása a  $\Theta \otimes \sigma = \{x_1|t_1, \dots, x_n|t_n, y_1|u_1, \dots, y_m|u_m\}$  halmaz, amelyből elhagyjuk a többszörösen szereplő komponenseket. Ha valamely  $x_i|t_i, y_j|u_j$  párra,  $x_i = y_j$ , de  $t_i \neq u_j$ , akkor  $\Theta$  és  $\sigma$  összekapcsolása nem értelmezett.

A definíció láthatóan az összekapcsolás parciális művelet. Ahhoz, hogy az összekapcsolás és a kompozíció műveletét együtt tudjuk alkalmazni, értelmeznünk kell a parciális kompozíció fogalmát is.

**3.6. Definíció.** A  $\Theta$  és  $\sigma$  helyettesítések parciális kompozíciója  $\Theta\sigma$ , ha mindkét helyettesítés értelmezett, és nincs értelmezve, ha  $\Theta$  és  $\sigma$  valamelyike nem értelmezett.

Először negációmentes fDATALOG programok kiértékelésével foglalkozunk. A kiértékelést az úgynevezett kiértékelési gráf segítségével hajthatjuk végre. Ez egy ÉS/VAGY fa-gráf, vagyis egy speciális hipergráf, melynek minden páratlan mélységű éle n-edrendű hiperél, a hozzá tartozó egy elemű csúccsal. Potosabban:

A kiértékelési hipergráf olyan fa-gráf, melynek gyökere a kiértékelendő cél, levelei a  $\odot$  és  $\oplus$  szimbólumok, csúcsait pedig rekurzív módon definiáljuk.

A gyökér szintjét 0-nak tekintve, a gráf minden páros szintjén kiértékelésre váró rész-célok, azaz megfelelő módon illesztett szabályfejek, minden páratlan szintjén kiértékelendő szabálytörzsek szerepelnek.

Legyen a  $k = 2i$ -edik szint egyik csúcsa a  $Q$  atom, és tegyük fel, hogy  $m$  db olyan

$$R \leftarrow R_1, \dots, R_n; I; \beta$$

alakú szabály van, melynek feje illeszthető  $Q$ -val. Ekkor ennek a csúcsnak  $m$  db leszármazottja van, és ezek a leszármazottak  $n > 0$  esetén

$$R_1\Theta, \dots, R_n\Theta$$

alakúak, ahol  $\Theta = \text{lge}(Q, R)$ ;  $n = 0$  esetén a leszármazott a  $\odot$  szimbólum. Ha egyetlen illeszthető szabályfej sincs, akkor a leszármazott csúcs a  $\ominus$  szimbólum.

Illesztéskor vigyáznunk kell a változóátnevezésre, vagyis arra, hogy az illesztett szabály törzsében szereplő változók változóidegenek legyenek az előző illesztésektől. Ez a legegyszerűbben úgy oldható meg, hogy a kiértékelési gráf szintjével indexeljük a változókat.

Cimkézzük meg a  $Q \rightarrow R_1\Theta, \dots, R_n\Theta$  éleket! Az él címkéje legyen a  $(\Theta; I; \beta)$  hármas.

Legyen a  $k = 2i + 1$ -edik szint egy csúcsa a  $Q_1, \dots, Q_n$  szabálytörzs! Ekkor a csúcsból egy  $n$ -edrendű hiperél vezet a  $Q_1, \dots, Q_n$  csúcsokba. A hiperélet nem címkézzük meg.

A lekérdezésre a kiértékelési gráf (gráfok) címkeiből kapjuk meg a választ.

A  $\ominus$  szimbólumban végződő út nem ad megoldást. Hagyjuk ki a gráfból ezeket az utakat úgy, hogy elhagyjuk az összes olyan csúcsot és élet, amely ehhez a szimbólumhoz vezet, függetlenül attól, hogy ezek a csúcsok közönséges vagy hiperéleken keresztül kapcsolódtak egymáshoz. (Vagyis ha egy hiperél egyik csúcsából vezet él a  $\ominus$  szimbólumhoz, akkor az adott hiperélhez tartozó összes csúcsot és rákövetkezőjét töröljük.) Az így kapott gráfot *keresési gráfnak* nevezzük.

A keresési gráf  $\odot$  szimbólumokban végződő útjai mentén határozhatjuk meg a megoldásokat. Ezek uniójaként kapjuk meg az adott célra vonatkozó választ, melyet a 2.5 definícióban értelmezett bizonytalansági-szint függvény segítségével számolhatunk ki.

A  $\odot$  szimbólumokhoz vezető tetszőleges hiperút mentén (mivel egy út hiperélet is tartalmaz, ezért az út több levélben végződhet) határozzuk meg a  $\Theta$  helyettesítést a következő módon: A gráf páros szintjén lévő csúcsaihoz rendeljük hozzá rendre a leszármazott hipercsúcs kivezető közönséges éleinek címkéjében szereplő helyettesítések összekapcsolását, majd képezzük a csúcsokhoz rendelt helyettesítések parciális kompozícióját.

Ekkor a

$$(Q, \alpha)$$

kérdésre adott egyik válasz:

$$(Q\Theta, \alpha_{\text{cél}}),$$

ahol  $\alpha_{\text{cél}}$  az  $f(I, \alpha, \beta)$  bizonytalansági-szint függvény segítségével számolható a következőképpen:

A számolást rekurzív módon definiáljuk. A levélnél kezdjük, melyhez  $\alpha = 1$ -et rendelünk kiinduló értéként. Innen haladunk a gyökér felé. Ha a gráf egy páratlan szintjén lévő csúcsának bizonytalansági szintje  $\alpha$ , akkor a szülő csúcshoz rendelt bizonytalansági szint legyen  $\alpha = (f(I, \alpha, \beta))$ , ahol  $I; \beta$  az él címkéjében szereplő értékek. Ha egy páratlan szinten lévő csúcs leszármazottainak bizonytalansági szintje  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ , akkor a csúcshoz rendelt bizonytalansági szint legyen  $\alpha = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ . A gyökérhez ilyen módon rendelt bizonytalansági szint az  $\alpha_{\text{cél}}$ .



3.1. PÉLDA. Tekintsük a következő szabályokat:

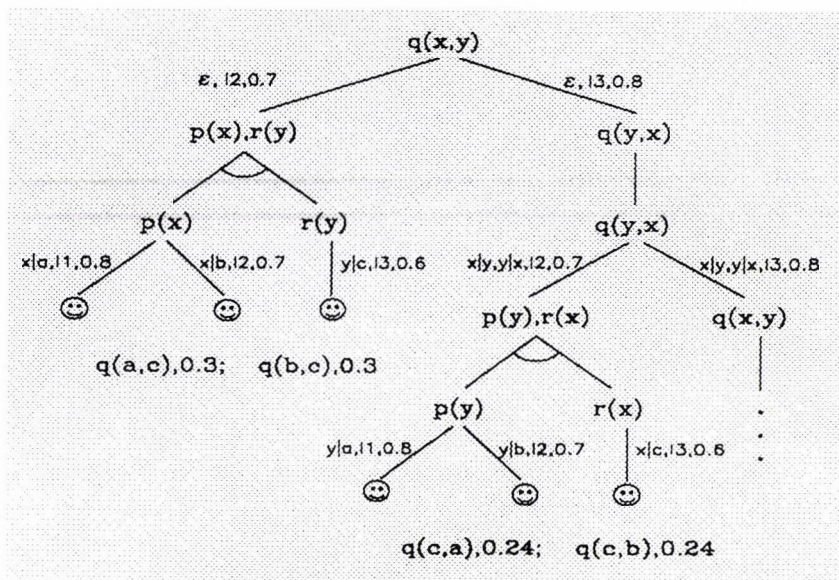
$$\begin{aligned} p(a) &\leftarrow I_1; \beta_1 \\ p(b) &\leftarrow I_2; \beta_2 \\ r(c) &\leftarrow I_3; \beta_3 \\ q(x, y) &\leftarrow p(x), r(y); I_2; \beta_4 \\ q(x, y) &\leftarrow q(y, x); I_3; \beta_5 \\ s(x) &\leftarrow q(x, y); I_3; \beta_6 \end{aligned}$$

Legyen  $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.7, \beta_3 = 0.6, \beta_4 = 0.7, \beta_5 = 0.8, \beta_6 = 0.9$

Célunk  $q(x, y)$  meghatározása.

Az alábbi ÉS/VAGY gráf alapján a keresett megoldás:

$$(q(a, c), 0.3), (q(b, c), 0.3), (q(c, a), 0.24), (q(c, b), 0.24)$$



Belátjuk, hogy véges kiértékelési gráf esetén a bottom-up és a top-down stratégia ugyanazt az eredményt adja. Pontosabban:

3.1. TÉTEL. Adott célhalmaz és véges kiértékelési gráf esetén a top-down kiértékelési algoritmus ugyanazt a megoldást adja, mint a fixpontkeresés.

*Bizonyítás.* A bottom-up és a top-down kiértékelés ekvivalenciáját a kiértékelési gráf mélységére vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

Először tegyük fel, hogy a kiértékelési gráf mélysége egy, vagyis a gyökér összes leszármazottja a ☺ vagy a ☹ szimbólum. Ez úgy lehetséges, ha a célpredikátumhoz vagy egyáltalán nem illeszthető szabályfej, vagy csak tényállítás illeszthető hozzá. Az első esetben mindkét stratégia szerint ugyanaz a tényállítás a válasz.

Indukciós feltevésként tegyük fel, hogy minden, legfőljebb  $n$  hosszúságú utat tartalmazó kiértékelési gráf esetén igaz az állítás!

Tekintsünk olyan kiértékelési gráfot, amelynek leghosszabb útvonala  $n + 1$  hosszúságú!

Vizsgáljuk meg a gráf második szintjén lévő részcélokat! Ezek kiértékelési gráfja legfőljebb  $n - 1$  mélységű, vagyis igaz rájuk az indukciós feltevés. A célállítás bottom-up módon csak ezekből a részcélokból érhető el. Egy-egy hiperél mentén bottom-up módon főljebb lépve az első szintre, megkapjuk azon szabályok szabálytörzsét és a szabálytörzs bizonytalansági szintjét, amelyekből az első szintre mutató élek címkeje, azaz az alkalmazandó szabályok bizonytalansági szintje, implikációs operátora és a megfelelő helyettesítés segítségével megkapjuk a keresett választ.

Tehát az indukciós feltevés szerint igaz az állítás véges mélységű kiértékelési gráfra.

A gráf kiértékeléséhez megadunk egy általános algoritmust, amely az adott program és az ismert célhalmaz (célok) esetén megadja a választhalmazt.

Az algoritmus két egymást hívó eljárásra épül, melyek egyike egy célt vagy részcélt értékel ki, a másik pedig egy szabálytörzset.

A célkiértékelő eljárás az összes illeszthető szabály esetén meghatározza az illesztett törzset, és ennek kiértékelésével megadja a célra adott választ, míg a szabálykiértékelő eljárás a szabálytörzs rész céljainak kiértékelésével megadja a törzshöz tartozó illesztést és a szabálytörzs bizonytalansági szintjét.

A célkiértékelés során az illeszthető szabályok sorrendjét, a szabálykiértékelő eljárás során pedig a részcélok kiválasztásának sorrendjét egy-egy kiválasztási függvény segítségével határozzuk meg. A speciális szimbólumokat (☺, ☹) nem vesszük be a kiértékelendő részcélok halmazába, hiszen ezek már nem értékelhetők ki. A ☹ szimbólum esetén nem volt illeszthető szabály, azaz az illeszthető szabályok  $R$  halmaza üres, míg a ☺ szimbólum esetén az illesztés után kaptunk üres csúcst, s ebben az esetben azonnal meghatározhatjuk a választ.

Célszerű a helyettesítések összekapcsolását is „top-down” módon megoldani, vagyis nem a részcélok független kiértékelése után végezni el az összekapcsolást, hanem egy „oldalsó információátadás”-sal előre leszűkíteni a vizsgált gráf méretét. Ez azt jelenti, hogy egy rész cél kiértékelésekor válaszként kapott helyettesítést azonnal alkalmazhatjuk a szabálytörzs többi tagjára, evvel esetenként jelentősen lecsökkentve a vizsgálandó utak számát.

Mivel egy rész cél kiértékelésekor az egységesítés során esetleg olyan változókat is helyettesítenünk kell, amelyek nem szerepelnek a rész cél változóinak között, ezért elég, ha a kiértékelés eredményeként a kapott illesztésnek csak a rész cél változóira vonatkozó vetületét tekintjük.

Az esetenként szükséges változóátnevezést a helyettesítőterm-halmaz fogalmának bevezetésével oldjuk meg. A  $\Theta = \{x_1|t_1, \dots, x_n|t_n\}$  helyettesítés helyettesítőterm-halmaza a  $\{t_1, \dots, t_n\}$  halmaz.

## 3.4. ALGORITMUS.

Kéértékelés:

begin

megoldáshalmaz :=  $\emptyset$ 

while nem\_üres( célhalmaz ) do

cél := eleme (célhalmaz)

célhalmaz := célhalmaz - { cél }

    célválasz :=  $\emptyset$ 

célkéértékelés ( cél, célválasz )

while nem\_üres (célválasz) do

 $(\Theta, \alpha\text{cél}) := \text{eleme (célválasz)}$         célválasz := célválasz -  $\{(\Theta, \alpha\text{cél})\}$         megoldás := megoldás  $\cup \{(\text{célatom}\Theta, \alpha\text{cél})\}$ 

endwhile

endwhile

end

Procedure célkéértékelés ( cél, célválasz )

célváltozó := { a célatom változóinak halmaza }

 $R := \{(r; I; \beta) \mid \text{szabályfej (r) illeszthető a célatommal}\}$     if  $R = \emptyset$  then return

while nem\_üres (R) do

 $(r; I; \beta) := \text{szabályválasztás (R)}$          $R := R - \{(r; I; \beta)\}$ 

törzs := szabálytörzs (r)

        for all változó  $\in r$  do            if változó  $\in \text{helyettesítőterm}(\Theta)$ 

then változó := újnév ( változó )

endfor

 $\Theta := \text{lge ( célatom, szabályfej (r) )}$         törzs := törzs $\Theta$          $\alpha\text{törzs} := 1$          $\Theta\text{törzs} := \varepsilon$         if törzs =  $\emptyset$  then célválasz := célválasz  $\cup \{(\Theta, f(I, \alpha\text{törzs}, \beta))\}$         else szabálykéértékelés (törzs,  $\alpha\text{törzs}$ ,  $\Theta\text{törzs}$ , célválasz, célváltozó,  $I, \beta$ )

endif

endwhile

endprocedure

Procedure szabálykéértékelés (törzs,  $\alpha\text{törzs}$ ,  $\Theta\text{törzs}$ , célválasz, célváltozó,  $I, \beta$ )

atom := atomválasztás (törzs)

újtörzs := törzs - { atom }

    válasz :=  $\emptyset$

```

célkiértékelés (atom, válasz)
if válasz =  $\emptyset$  then return
while nem_üres (válasz) do
   $(\Theta, \alpha\text{atom}) := \text{eleme (válasz)}$ 
   $\text{válasz} := \text{válasz} - \{(\Theta, \alpha\text{atom})\}$ 
   $\Theta\text{örzs} := \Theta\text{örzs}\Theta$ 
   $\alpha\text{örzs} := \min(\alpha\text{örzs}, \alpha\text{atom})$ 
  if újörzs  $\neq \emptyset$  then
    újörzs := újörzs $\Theta$ 
    szabálykiértékelés(újörzs,  $\alpha\text{örzs}$ ,  $\Theta\text{örzs}$ , célválasz, célváltozó, I,  $\beta$ )
  endif
  if újörzs =  $\emptyset$  then
     $\Theta := \text{vetület}(\Theta\text{örzs}, \text{célváltozó})$ 
     $\text{célválasz} := \text{célválasz} \cup \{(\Theta, f(I, \alpha\text{örzs}, \beta))\}$ 
  endif
endwhile
endprocedure

```

**MEGJEGYZÉS.** Mivel negációmentes *f*DATALOG esetén a determinisztikus és a nem-determinisztikus szemantika megegyezik, ezért a top-down kiértékelés sorrendje (vagyis az illesztendő szabályok és a kiértékelendő részcélok kiválasztási sorrendje) lényegtelen. Ez a sorrend azonban befolyásolhatja az algoritmus hatékonyságát.

A válaszadás során minden — a célatomnak megfelelő — alapatomhoz meghatároztunk egy bizonytalansági szintet. Ha a  $(Q; \alpha)$  célban szereplő bizonytalansági szint egy változó, akkor a megoldásban ez a változó az így meghatározott értéket veszi fel. Ha az  $\alpha$  konstans, akkor az algoritmus végrehajtásakor kapott atom csak akkor kerül be a megoldáshalmazba, ha a kiszámított bizonytalansági szintje nagyobb  $\alpha$ -nál vagy egyenlő vele. Ebben az esetben azonban főlőseges figyelembe venni a program összes szabályát, elég csak azokkal foglalkoznunk, melyek bizonytalansági szintje nagyobb vagy egyenlő  $\alpha$ -nál. Ily módon a kiértékelési gráf mérete csökkenthető.

Mint a 3.1. példa is mutatja, egészen egyszerű esetekben is előfordulhat, hogy a top-down kiértékelés nem terminál. Ennek oka a rekurzív atomok kiértékelésében keresendő, hiszen nem rekurzív atomok kiértékelése véges sok lépésben befejeződik. (Ez a lépésszám nem más, mint  $2t + 1$ , ahol  $t$  a függőségi gráfban az adott atomhoz vezető leghosszabb út hossza.)

Ha azonban a rekurzív atomokhoz hozzárendelünk egy, a kiértékelésre vonatkozó korlátot, akkor az eljárás megállítható. A korlát a következő módon határozható meg:

Jelölje  $h$  a függőségi gráfban az illető atom predikátumát tartalmazó körök maximális hosszát,  $t$  pedig az illető predikátumba vezető körmentes utak maximális hosszát.

Vezessük be a rekurziós távolság fogalmát. Ez az az érték, ahány lépésben bottom-up kiértékeléssel megkapjuk az illető atomra vonatkozó fixpontot. A rekurziós távolság függ a program konstansainak számától, és természetesen függ a vizsgált predikátum „tartalmától”.

Például az

$$\begin{aligned}u(x, y) &\leftarrow e(x, z), u(z, y); I; \beta_1 \\u(x, y) &\leftarrow e(x, y); I; \beta_2\end{aligned}$$

program esetén, ahol az  $e$  ténypredikátum, és a program konstansainak száma  $c$ , az  $u(x, y)$  atom rekurziós távolsága  $c - 1$ .

Jelöljük az atomhoz tartozó rekurziós távolságot  $r$ -rel!

Ekkor a mélységi korlát  $k = 2h(r - 1) + 2t + 1$ .

**3.4. ÁLLÍTÁS.** *A P program minden egyes rekurzív atomjához hozzárendelve az előzőekben értelmezett mélységi korlátot, a top-down eljárás terminál, és megadja a célnak megfelelő összes megoldást.*

*Bizonyítás.* Mivel a célkiértékelést visszavezettük részcélok kiértékelésére, ezért elegendő megmutatni azt, hogy egyetlen rekurzív atom esetén helyes megoldást kapunk.

Ha a függőségi gráfban egy predikátumhoz nem juthatunk el körmentes úton is, akkor az illető szabály kiértékelhetetlen, vagyis az illető predikátumhoz tartozó alapatomok nem kerülnek be a fixpontba. Ezért elég csak azokkal az esetekkel foglalkoznunk, ahol létezik ilyen út.

Mivel a kiértékelési gráfot két különböző lépésből — a szabálytörzs meghatározásából és a törzs részcélokra bontásából — álló lépéssorozattal építhetjük fel, ezért ha a függőségi gráfban  $t$  hosszúságú úton jutunk el a vizsgált predikátumhoz, akkor itt ez az út kétszer olyan hosszú lesz, s ehhez adódik még a végszimbólumokba vezető él hossza.

A korlátban szereplő  $2t$  hosszúságú úton a vizsgált atomtól tehát egy ténypredikátumhoz tartozó atomhoz jutunk, amelyet az adott ténypredikátumoknak megfelelően ki tudunk értékelni.

A kiértékelési gráfban a szóban forgó atom — esetleg más változókkal —  $2h$  lépéssel mélyebben ismét előfordul. Az újbóli kiértékelésnek csak akkor van értelme, ha evvel az eredeti kérdésre újabb választ kapunk. Ez viszont a rekurziós távolságnál többször nem fordulhat elő. Mivel az első ismétlődéskor már a második rekurziós szintre jutottunk, ezért elég, ha csak  $r - 1$ -szer engedjük meg az ismétlődést.

Mivel egy rész cél kiértékelésekor az összes lehetséges szabályfejjel illesztjük az illető részelt, ezért megkapjuk az összes lehetséges adott rekurziós mélységű választ. Mivel a megadott korlátnál mélyebben már nem kapunk újabb eredményt, ezért ezek az ágak elhagyhatóak. (Újabb alapatomot nem, de újabb bizonytalansági szintet kaphatunk, ez a bizonytalansági szint azonban kisebb az előzőnél, így az unióképzésben értéke felülíródik.)

Minden egyes rész célhoz bevezetve a megfelelő korlátot, az algoritmus terminál, és megadja a célnak megfelelő összes megoldást.

**MEGJEGYZÉS.** *A rekurziós távolság nem minden esetben határozható meg olyan egyszerűen, mint az említett példában, azonban nem lehet nagyobb  $c^n$ -nél, ahol  $c$  a program konstansainak,  $n$  pedig az atom argumentumainak száma.*

Ha a top-down algoritmus célkiértékelési eljárását kiegészítjük egy mélységi korlát - vizsgálattal, akkor az algoritmus terminál. Az algoritmus mélységi korlát bevezetése nélkül

is átalakítható úgy, hogy minden esetben termináljon. Ebben az esetben nem rekurzív, hanem iteratív módon célszerű számolnunk, azaz egy részcel egyetlen megtalált válaszával azonnal „végigmenni” a szabálytörzs többi részceljén, ily módon azonnal megadni egy, a célra vonatkozó választ. Ezt az iterációt addig folytathatjuk, amíg a választhalmaz változik.

### 3.5. Top-down kiértékelés speciális implikációs operátor esetén.

A top-down kiértékelési stratégiában a kiértékelés elvégzéséhez egy hipergráfot kellett vizsgálnunk, ezen kellett megkeresnünk a megoldást. A hiperélek abból adódtak, hogy a szabálytörzs bizonytalansági szintjét speciális módon, a benne szereplő atomok bizonytalansági szintjének minimumaként kell meghatározni, a közönséges élek mentén viszont az adott implikációs operátortól függő módon számolhatunk.

Az egyik speciális implikációs operátor, az

$$I_1(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y \\ y & \text{különben} \end{cases}$$

esetén azonban a bizonytalansági szint meghatározására szolgáló  $f(I, \alpha, \beta)$  függvény értéke  $f(I, \alpha, \beta) = \min(\alpha, \beta)$  módon számolható, azaz nincs különbség a szabálytörzs és a részcel bizonytalansági szintjének kiszámítása között.

Ezért abban az esetben, ha a program összes szabályában az  $I_1$  implikációs operátor szerepel, akkor a hipergráf helyett elég közönséges gráfot vizsgálnunk.

A közönséges kiértékelési gráf egy olyan fa-gráf, melynek gyökere a kiértékelendő cél, levelei a  $\odot$  és  $\ominus$  szimbólumok, csúcsait pedig rekurzív módon definiáljuk.

Legyen a  $k$ -adik csúcs  $Q_1, \dots, Q_n$ , ahol  $Q_1, \dots, Q_n$  atomok. Ha valamennyi  $i$  esetén  $m$  db olyan

$$R \leftarrow R_1, \dots, R_s; I_1; \beta$$

alakú szabály van, melynek feje illeszthető  $Q_i$ -vel, akkor a  $k$ -adik csúcsnak  $m$  db leszármazottja van, és ezek a leszármazottak  $s > 0$  esetén

$$Q_1 \ominus, \dots, Q_{i-1} \ominus, R_1 \ominus, \dots, R_s \ominus, Q_{i+1} \ominus, \dots, Q_n \ominus$$

alakúak, ahol  $\ominus = \text{lge}(Q_i, R)$ ;

$s = 0$  esetén a leszármazott a  $\odot$  szimbólum.

Ha egyetlen  $Q_i$  sem illeszthető egyetlen szabályfejjel sem, akkor a leszármazott csúcs a  $\odot$  szimbólum.

A levelekhez vezető utakon címkézzük meg a gráf éleit! Tegyük fel, hogy az út  $k$ -adik csúcsából az  $(r; I_1; \beta)$  szabály alkalmazásával jutottunk az út  $k + 1$ -edik csúcsába! Ekkor a  $k \rightarrow k + 1$  él címkéje legyen a  $(\ominus; \beta)$  pár, ahol  $\ominus$  a  $k \rightarrow k + 1$  élen alkalmazott legáltalánosabb egységesítő helyettesítés.

A lekérdezésre ebben az esetben is a kiértékelési gráf (gráfok) címkéiből kapjuk meg a választ.

A  $\odot$  szimbólumban végződő út nem ad megoldást, míg a  $\ominus$ -ban végződő utak alapján meghatározott megoldások uniója megadja az adott célra vonatkozó választ.

A

$$(Q, \alpha)$$

kérdésre adott válasz:

$$(Q\Theta, \alpha_{\text{cél}}),$$

ahol  $\Theta$  a ☺ szimbólumhoz vezető úton alkalmazott helyettesítések kompozíciója, és  $\alpha_{\text{cél}}$  az út éleihez tartozó bizonytalansági szintek minimuma.

3.2. PÉLDA. Tekintsük a következő szabályokat:

$$p(a) \leftarrow; I_1; \beta_1$$

$$r(b) \leftarrow; I_1; \beta_2$$

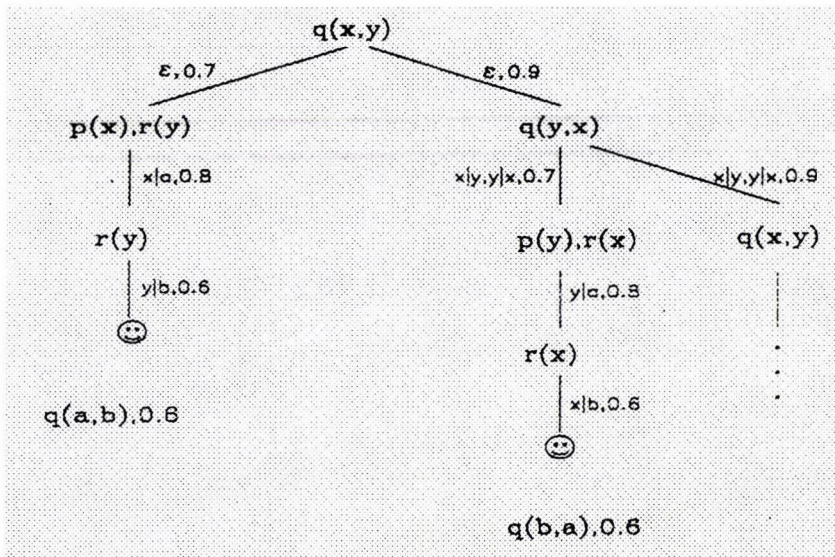
$$q(x, y) \leftarrow p(x), r(y); I_1; \beta_3$$

$$q(x, y) \leftarrow q(y, x); I_1; \beta_4$$

$$s(x) \leftarrow q(x, y); I_1; \beta_5$$

Legyen  $\beta_1 = 0.8, \beta_2 = 0.6, \beta_3 = 0.7, \beta_4 = 0.9, \beta_5 = 0.7$

Célunk  $q(x, y)$  meghatározása.



A kiértékelési gráf: A gráfról leolvasható a feladat megoldása:

$$(q(a, b), 0.6); (q(b, a), 0.6)$$

Ezen gráf kiértékeléséhez is megadunk egy általános algoritmust, amely az adott program és az ismert célhalmaz (célok) esetén mrgadja a válaszalmazt. A megoldást a gráf csúcsainak valamely sorrendben való kiterjesztésével határozzuk meg. Azokat a csúcsokat

lehet kiterjeszteni, melyeknek valamelyik atomja illeszthető legalább egy szabályfejjel. Egy csúcs kiterjesztése során meghatározzuk az összes közvetlen rákövetkezőjét. A kiterjeszthető csúcsok halmazát nyílt halmaznak nevezzük, s a halmaz kiterjesztendő elemeit egy kiválasztási függvény segítségével határozzuk meg. Ugyancsak egy kiválasztási függvény határozza meg az illeszthető szabályok sorrendjét, és azt is, hogy egy-egy csúcsot melyik atom szerint terjesszünk ki. A speciális szimbólumokat ( $\odot$ ,  $\ominus$ ) nem vesszük be a nyílt halmazba, hiszen ezek már nem terjeszthetők tovább. Ugyanúgy, ahogy az általános esetben, a  $\odot$  szimbólum esetén nem volt illeszthető szabály, míg a  $\odot$  szimbólum esetén az illesztés után kaptunk üres csúcsot, s ebben az esetben azonnal meghatározhatjuk a választ.

### 3.5. ALGORITMUS.

Kiértékelés:

begin

    cél := eleme (célhalmaz)

    válasz :=  $\emptyset$

    while nem\_üres ( célhalmaz ) do

        kiértékel ( cél, válasz)

        célhalmaz := célhalmaz - {cél}

    endwhile

end

Procedure kiértékel ( cél, válasz )

    célváltozó := { a célatom változóinak halmaza }

    nyílt := { (célatom,  $\varepsilon$ , 1) }

    while nem\_üres (nyílt) do

        (régi\_csúcs, illesztés,  $\alpha$ ) := csúcsválasztás (nyílt)

        nyílt := nyílt - { (régic\_súcs, illesztés,  $\alpha$ ) }

        atom := atomválasztás (régic\_súcs)

        kiterjeszt (atom, nyílt, régic\_súcs, illesztés, válasz)

    endwhile

endprocedure

Procedure kiterjeszt (atom, nyílt, régic\_súcs, illesztés,  $\alpha$ , válasz)

    R := {(r; I;  $\beta$ ) | szabályfej (r) illeszthető az atommal }

    if R =  $\emptyset$  then return

    while nem\_üres (R) do

        (r; I;  $\beta$ ) := szabályválasztás (R)

        R := R - {(r; I;  $\beta$ )}

        Q := szabálytörzs (r)

        új\_csúcs := régic\_súcs - atom

        for all változó  $\in$  r do

            if változó  $\in$  helyettesítőterm (illesztés) or változó  $\in$  új\_csúcs

            then változó := újnév (változó)



```

endfor
 $\Theta := \text{lge}(\text{atom}, \text{szabályfej}(r))$ 
új_csúcs :=  $Q \ominus \wedge \text{új\_csúcs} \ominus$ 
szabályillesztés := vetület(illesztés- $\Theta$ , célváltozó)
 $\alpha r := \min(\alpha, \beta)$ 
if új_csúcs =  $\emptyset$  then válasz := válasz  $\cup \{(\text{célatom} \cdot \text{szabályillesztés}, \alpha r)$ 
else nyílt := nyílt  $\cup (\text{új\_csúcs}, \text{szabályillesztés}, \alpha r)$ 
endwhile
endprocedure

```

3.2. TÉTEL. Adott célhalmaz és véges kiértékelési gráf esetén a fenti kiértékelési algoritmus ugyanazt a megoldást adja, mint a fixpontkeresés.

*Bizonyítás.* A bottom-up és a top-down kiértékelés ekvivalenciáját ebben az esetben is a kiértékelési gráf mélységére vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

Először tegyük fel, hogy a kiértékelési gráf mélysége egy, vagyis a gyökér összes leszármazottja a  $\odot$  vagy a  $\ominus$  szimbólum! Ez úgy lehetséges, ha a célpredikátumhoz vagy egyáltalán nem illeszthető szabályfej, vagy csak tényállítás illeszthető hozzá. Az ilyen gráf levele akkor és csak akkor lehet a  $\odot$  szimbólum, ha a tényhalmazból bottom-up levezetéssel, a megfelelő illesztéssel előállítható a cél.

Indukciós feltevésként tegyük fel, hogy minden, legfőljebb  $i$  hosszúságú utat tartalmazó kiértékelési gráf esetén igaz az állítás.

Tekintsünk olyan kiértékelési gráfot, amelynek leghosszabb útvonala  $i + 1$  hosszúságú. Ha ennek az útnak a végpontja a  $\ominus$  szimbólum, akkor a tényekből nem vezet ide út.

Ha a végszimbólum  $\odot$ , akkor az előző szinten tényatom van. Ehhez akkor és csakis akkor találunk megfelelő illesztést, ha az illesztéssel kapott alapatom szerepel a tények között. Ehhez a tényatomhoz vezető él helyett vezessünk be a kiértékelési gráfba  $k$  darab  $\odot$ -ban végződő élet, ha a tények közül  $k$  darab illeszthető ehhez a ténypredikátumhoz.

Ha a tényatomhoz vezető él címkéje  $(\Theta, \beta)$  volt, és az innen továbbvezető él címkéje  $(\sigma, \beta')$ , akkor az új él címkéje legyen  $(\Theta\sigma; \min(\beta, \beta'))$ !

Ez az átalakítás csak akkor lehetséges, ha a megfelelő tényekből bottom-up következtetéssel származtathatjuk az  $i$ -edik szinten lévő ténypredikátumot.

Mivel az ilyen módon átalakított gráf mélysége  $i$  lesz, ezért az indukciós feltevés szerint igaz az állítás tetszőleges véges mélységű kiértékelési gráfra.

Az előzőekben megadott algoritmus az általános esethez hasonlóan, nem minden esetben terminál. Alkalmas mélységi korlát bevezetésével azonban ebben az esetben is megoldható ez a probléma.

Az általános algoritmushoz megkonstruált mélységi korlát most nem alkalmazható, mert ez a gráf általában mélyebb és keskenyebb a hipergráfnál. Ez abból adódik, hogy az általános esetben a szabálytörzs kiértékelendő rész céljai ugyanazon a szinten voltak, míg a speciális esetben egymás alatti szintre kerültek.

A szabálytörzsben szereplő predikátumokhoz az általános esethez hasonlóan itt is hozzárendelhető a 3.4. állításban megadotthoz hasonló mélységi korlát annyi különbséggel, hogy esetünkben a speciális kiértékelési gráf tulajdonságaiból adódóan nem kell kétszeres

úthosszakkal számolunk, vagyis az  $i$ -edik részcélhoz a

$$k_i = h_i(r_i - 1) + t_i + 1$$

korlát rendelhető, s az

$$R \leftarrow R_1, \dots, R_m; I_1; \beta$$

alakú szabály rekurzív fejpredikátumához rendelt korlát:

$$k = 1 + \sum_{i=1}^m k_i.$$

A 3.4. állításhoz hasonlóan belátható, hogy:

*ÁLLÍTÁS. Mélységi korlát bevezetésével a speciális top-down eljárás terminál és megadja a célnak megfelelő összes megoldást.*

### 3.6. Top-down kiértékelési heurisztikák.

A top-down algoritmus során az általános és a speciális esetben is többször alkalmaztunk kiválasztási függvényeket. Bizonyos esetekben érdektelen a választási sorrend, más esetekben viszont ügyes választással lényegesen hatékonyabbá tehető az eljárás. A továbbiakban külön-külön tárgyaljuk a két algoritmus kiértékelési heurisztikáit.

Tekintsük először az általános algoritmust! Az algoritmus végrehajtása során lényegtelen, hogy milyen sorrendben értékeljük ki a célhalmaz elemeit, s az sem befolyásolja az eredményt, hogy az egy-egy rész cél kiértékelésekor kapott válasz halmaz elemeivel milyen sorrendben számolunk tovább. Lényeges lehet azonban az illeszthető szabályok és a kiértékelendő rész célok sorrendje. Ezt kihangsúlyozandó, az algoritmusban az első két esetben a kiválasztást az „elem” függvény segítségével, míg a másik két esetben a „szabályválasztás” és az „atomválasztás” segítségével oldottuk meg.

Erdemes a következő kiértékelési heurisztikát alkalmazni:

- A szabályok közül célszerű előbb a tényekre vonatkozóakat alkalmazni, illetve azokat, melyek fejpredikátuma nem szerepel a függőségi gráf egyetlen kört tartalmazó útján sem, vagyis amely szabályok nem játszanak szerepet egyetlen rekurzív programrészletben sem.
- A rész célok közül pedig célszerű előre venni azokat, amelyek argumentumában konstans szerepel.

Az eljárás során előfordulhat, hogy többször is ki kell értékelnünk ugyanazt a rész célt. Nem törölhetjük automatikusan az egyiket, hiszen a rész célnak megfelelő alapatom más úton esetleg más szinten kerül be a megoldásba. Ha azonban ugyanazon az ágon fordul elő ismétlődés, akkor a mélyebben fekvő atom levágható, hiszen ezen az ágon már nem kaphatunk új eredményt. A mélységi korlát beépítésével azonban ez az atom automatikusan „levágódik”.

A speciális algoritmus esetén szintén lényegtelen a kiértékelendő célok kiválasztási sorrendje. Mivel egy csúcs kiterjesztése során meg kell határoznunk az összes leszármazottat,

vagyis illeszteniünk kell a megfelelő atomot az összes lehetséges szabályfejjel, ezért ez esetben a szabályok kiválasztási sorrendje is lényegtelen.

A kiterjesztendő csúcs kiválasztási sorrendje és a kiterjesztendő csúcs esetén a kiterjesztendő atom kiválasztásának sorrendje azonban befolyásolható, és ügyes választás esetén a kiértékelési eljárás egyszerűsíthető.

Az eljárás során előfordulhat, hogy a nyílt halmazba többször is bekerül ugyanaz a formula. Nem törölhetjük automatikusan az egyiket, hiszen a formula más úton esetleg más szinten kerül be a halmazba. Azt azonban megtehetjük, hogy mindkét formulához kiszámítjuk az aktuális szintértéket (az adott formulát tényként kezelve a szintszámításnál kiinduló értéként egyet választva), és a kisebb szintértékűt kihagyjuk a nyílt halmazból. Evvel a lépéssel nem csorbítjuk a megoldást, hiszen azt a válaszok uniójaként kapjuk, s az unióképzés szabályai szerint azonos atomok esetén a nagyobb szintértéket vesszük figyelembe. Ilyen módon azonban esetleges végtelen ágakat vághatunk le.

Az adott csúcst a formula valamelyik atomja szerint terjesztjük ki. Az atomok sorrendjének ügyes megválasztásával itt is egyszerűsíthető a kiértékelés.

Ha van, akkor célszerű először ténypredikátumokat választani az atomok közül. Ezek esetén ugyanis hamar eldönthető, hogy található-e hozzájuk a célnak megfelelő illesztés.

Ugyancsak célszerű előre venni azokat az atomokat, amelyek argumentumában minél több konstans szerepel (azaz amelyekben kevés a változó). Így ugyanis szűkül a szóba jöhető illesztések köre.

### 3.7. Az általános top-down kiértékelés rétegzett fDATALOG esetén.

Mint láttuk, negáció- és függvénymentes fDATALOG bottom-up és top-down kiértékelési stratégiája adott célhalmaz esetén megegyezik.

A bottom-up technikát kiterjesztettük rétegzett fDATALOG esetére is. Most a top-down stratégiát értelmezzük, és megadjuk a kiértékelési algoritmus módosított változatát.

Nehézséget a negált predikátumok kiértékelése jelent, hiszen ilyen esetben nem képezhetjük a közvetlen utódokat, pontosabban a közvetlen leszármazottakat más módon kell meghatározni. Bottom-up kiértékelés során a negált predikátumok kezelésére a rétegzés nyújtott segítséget, hiszen itt a rétegzés sorrendjében kiértékelve a szabályokat már biztos ismeretünk volt a negált predikátumról, mire az valamelyik szabály törzsében sorra jutott.

Rétegzett fDATALOG esetén a szabályfej predikátuma legalább olyan magas rétegen van, mint a törzspredikátumok. Ez azt jelenti, hogy top-down kiértékeléskor a magasabb rétegek felől közelítünk az alacsonyabb felé, azaz a kiértékelési gráfban a szülőcsúcs rétegszintje magasabb vagy egyenlő az utódok rétegszintjénél. Ebből adódik, hogy a kiértékelés során a bizonytalansági szint kiszámítását a legalsó rétegnél kezdjük. Ezt az észrevételt használjuk fel a negált predikátumok kezelésére. Ha egy részcel negálva szerepel, akkor a kiértékelést ugyanúgy végezhetjük, mint negációmentes esetben, de jelöljük meg ezt a részcelt! A megjelölést a bizonytalansági szint számításakor vesszük figyelembe. Ekkor ugyanis megjelölt atomhoz érkezve, ha az eddig számolt bizonytalansági szint  $\alpha$  volt, akkor az  $1 - \alpha$  értékkel számolunk tovább.

#### 4. Konklúzió

Cikkünkben a Datalog-szerű nyelvek egy lehetséges fuzzy kiterjesztését adtuk meg úgy, hogy a Datalog szabályokat kiegészítettük egy bizonytalansági szintet jelző értékkel és egy implikációs operátorral. Defináltuk az fDATALOG determinisztikus és nemdeterminisztikus szemantikáját és különböző kiértékelési stratégiákat is értelmeztünk.

Az fDATALOG fuzzy adatokra is kiterjeszthető. A hasonlósági relációk felhasználásával ilyen irányban indul el [AK2].

#### IRODALOM

- [AK1] ACHS, ÁGNES, KISS, ATTILA, „Fixpoint query in fuzzy Datalog”, *Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp.* 15 (1995), 223–231.
- [AK2] ACHS, ÁGNES, KISS, ATTILA, „Fuzzy extension of Datalog”, *Acta Cybernetica, Szeged* 12 (1995), 153–166.
- [CGT] CERI, S., GOTTLOB, G., TANCA, L., *Logic Programming and Databases*, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [DP] DUBOIS, DIDIER, PRADE, HENRI, „Fuzzy sets in approximate reasoning, Part 1: Inference with possibility distributions”, *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991), 143–202.
- [GS] GUREVICH, YURI, SHELAH, SAHARON, „Fixed-point extensions of first-order logic”, *IEEE Symp. on FOCS* (1985), 346–353.
- [K] KISS, ATTILA, *On the least models of fuzzy Datalog programs* *Intelligent Systems with Uncertainty*, ed. B. Boucheon-Meunier, L. Valverde, R. Yager, published by Elsevier, 1993, 275–283.
- [L] LLOYD, J.W., *Foundations of Logic Programming*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [N] NOVÁK, VILÉM, *Fuzzy sets and their applications*, Adam Hilger Bristol and Philadelphia, 1989.
- [P] PÁSZTORNÉ VARGA, KATALIN, *A matematikai logika és alkalmazásai*, Tankönyvkiadó, Bp., 1986.
- [U] ULLMANN, J.D., *Principles of database and knowledge-base systems*, Computer Science Press, Rockville, 1988.

(Beérkezett: 1997. október 10.)

ACHS ÁGNES  
JANUS PANNONIUS TUDOMÁNYEGYETEM  
POLLACK MIHÁLY MŰSZAKI FŐISKOLAI KARA  
PÉCS

KISS ATTILA  
BÓTVÓS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
BUDAPEST

#### FUZZY EXTENSION OF DATALOG

Á. ACHS AND A. KISS

In this paper we define the fuzzy Datalog programs as sets of Horn-formulae with uncertainty degrees, and we define the deterministic and nondeterministic semantics. The meaning of programs are the fixpoints of deterministic consecutive transformations. In the second part of the paper we deal with evaluation strategies of fuzzy Datalog programs. We determine the bottom-up and top-down strategies and we show the equivalence of them. At last we deal with the top-down evaluation in the case of special implication operator.

## A TERMÉSZETES SZÁMOK PEANO ARITMETIKÁT IS VITATÓ ÚJ, ÁLTALÁNOS ELMÉLETE

RÁZGA TAMÁS

Budapest

A dolgozat központi témájaként a természetes számok aritmetikájának egy új, általános elméletét ismertetjük. Megmutatjuk, hogy az új elmélet ellentmondás-mentes, a rekurzió axiómája nélkül is teljes értékű leírást ad, és érvényessége kiterjed a nagy értékek tartományára is. A dolgozat új megvilágításba helyezi a Peano aritmetika teljes problémakörét, nevezetesen bebizonyítja egy eddig rejtett belső ellentmondásának létezését. Végül pedig bemutatunk egy aritmetikai formulát, melynek nagypontosságú numerikus meghatározásától az említett ellentmondás közvetlen kísérleti igazolását várjuk.

### 1. Bevezetés

A matematika minden kétséget kizáróan tapasztalati eredetű, de művelésének módjából adódóan sokkal inkább spekulatív tudomány [1]. Ez a megállapítás különösen igaz a természetes számok Peano féle aritmetikájára, a matematika, és minden más tudományág kétség kívül legkifejezőbb és ugyanakkor legelegánsabb elméletére. A Peano aritmetika minden vitathatatlan érnyere és a szinte fenntartásoktól mentes elfogadottsága ellenére több olyan ismeretelméleti problémával terhelt, ami beárnyékolja mindaddigi fennálló abszolút érvényét.

Lévéen, hogy a Peano aritmetika elsődlegesen spekulatív elmélet, ezért érvényessége csak a rendszer belső ellentmondás-mentességén keresztül vonható kérdőre. A problémakör vizsgálatának tekintélyes múltja és számos kiemelkedő eredménye ellenére be kell ismernünk, hogy az ellentmondás-mentességet mind a mai napig csak hitünk és több ezer éves tapasztalatunkból következő meggyőződésünk támasztja alá. Gentzen transzsfinit módszeren alapuló bizonyítása se nem meggyőző, se nem elfogadható, Gödel híres második tétele pedig egyszer és mindenkorra reménytelenné tette az ellentmondás-mentesség igazolását. [2], [3], [4].

Minden jel arra mutat, hogy a rendszer ellentmondás-mentességének igazolására tett valamennyi eddigi kísérlet kudarcáért a rekurzió axiómája tehető felelőssé. Ezt bizonyítja többek között az a tény is, hogy (amint azt Neumann János 1927-ben kimutatta) ha a rekurzió axiómáját kicseréljük annak egy egyszerűsített (kevésbé kifejező) változatával, úgy a “szűkített” Peano aritmetika ellentmondás-mentessége már kielégítő módon igazolható [3]. A rekurzió axiómáját ugyanakkor egyéb ismeretelméleti megfontolásokból is kifogás éri., hiszen olyan állítást fejez ki, ami tapasztalati módszerekkel eleve nem igazolható [2].

Mivel nem áll módunkban bizonyítani a rendszer belső ellentmondás-mentességét, ezért a Peano aritmetika érvényességének igazolására pusztán csak egyetlen lehetőségünk marad, nevezetesen az elmélet alkalmazásából következő eredmények közvetlen összevetése a tapasztalattal [1]. Igen ám, de a Peano aritmetika — szerkezetéből adódóan — a természetes számok tulajdonságait közvetlenül kiterjeszti az olyan nagy értékek tartományára is (pl.:  $10^{10^{10}}$ ), amik a tapasztalati megfigyelés számára eleve nem is hozzáférhetők [5].

A dolgozatnak épp az a célja és programja, hogy felvázolja a természetes számok alapelvében is merőben új, általános elméletét, mely:

- a) felépítésénél fogva mentes az előbb említett súlyos ismeretelméleti problémáktól,
- b) bepillantást enged a természetes számok eddig rejtett összefüggéseibe, mégpedig azért, hogy azok „igen nagy” értékek tartományában is érvényes leírását adja,
- c) a „kis értékek” tartományában közel maradéktalanul adja vissza a klasszikus matematika több ezer éves tapasztalattal igazolt tételeit,
- d) elvezet a Peano aritmetika egy belső ellentmondásához, és egyúttal konkrét módszert is kínál ennek numerikus számításokon alapuló tényleges igazolására.

Mindezen célkitűzéseket az alábbiakban felvázolt program szerint valósítjuk meg.

- a) Az új elmélet alapjául az aritmetika Robinson féle axiómarendszerét (egyszerűen csak: **RA**) választjuk, ami bizonyítottan ellentmondásmentes, így kellően biztos háttérrel képez.
- b) Az új elmélet ismertetése során megmutatjuk, hogy a természetes számok körén belül két jól definiált tartomány különíthető el, nevezetesen:
  - a principális számok tartománya, ami a „kis” értékeket képviseli, ahol is a rekurzió axiómája és a klasszikus elmélet számos tétele jó közelítéssel érvényes, továbbá
  - a kardinális számok tartománya, ami felöleli azokat a „nagy” értékeket is, ahol a természetes számok szemléletmódunknak és mai ismereteinknek (a Peano aritmetikának) ellentmondóan viselkednek.
- c) Az új elmélet keretein belül precízen megfogalmazzuk a Peano aritmetika ellentmondásmentességének kritériumát, ami az egész kérdéskört merőben új megvilágításba helyezi. Nevezetesen megmutatjuk, hogy
  - a Peano aritmetika ellentmondás-mentessége (ahogy azt Gödel második tétele kimondja) nem egyszerűen csak nem bizonyítható, de
  - minden korábbi várakozásunk és meggyőződésünk ellenére egyszerűen nem is igaz.

- d) A matematika „nevezetes konstansait” előállító algoritmusok terén épp a közelmúltban elért áttörő eredményekre, valamint a számítás-technika rohamos fejlődésére hivatkozással bemutatunk egy bizonyítási módszert, melynek nagy volumenű numerikus számításokon alapuló elvégzésétől a Peano aritmetika bonyolult metamatematikai megfontolásokkal bizonyított belső ellentmondásának egy sokkal egyértelműbb, közvetlen kísérleti igazolását várjuk.

Itt kívánjuk megjegyezni, hogy a problémakör meglehetősen komplex voltára, és a rendelkezésre álló szerény terjedelemre tekintettel jelen dolgozat keretében ennek a programnak csak a felvázolására, ezen belül az alapkoncepciónak és a gondolatmenet legmeghatározóbb elemeinek az ismertetésére vállalkozunk, eltekintünk a hivatkozott bizonyítások részletes bemutatásától, és megelégszünk az új elméletből következő fontosabb tételek és állítások pusztá felsorolásával.

## 2. RA, azaz Robinson axiómarendszere

### 2.1. Alapfogalmak.

- i. Konstans : „0”
- ii. Változók : „a”, „b”, „c”, ... „ $\alpha$ ”, „ $\beta$ ”, „ $\gamma$ ”, ... „x”, „y”, „z”, ...
- iii. Műveletjelek : „S”, „+”, „.”
- iv. Egyenlőségjel : „=”

### 2.2. Axiómák.

- 1 $_{\alpha}$ .  $a = 0$ , vagy van olyan „b”, hogy:  $a = Sb$
- 2. Nincs olyan „a”, amire:  $Sa = 0$
- 3. Ha valamely „a” és „b”-re  $Sa = Sb$ , úgy egyúttal:  $a = b$
- 4. Ha valamely „a”, „b” és „c”-re  $a = b$  és  $b = c$ , úgy egyúttal:  $a = c$
- 5 $_{\alpha}$ . Ha valamely „a” és „b”-re  $a = b$ , úgy minden „c”-re egyúttal:  $a + c = b + c$
- 5 $_{\beta}$ . Ha valamely „a” és „b”-re  $a = b$ , úgy minden „c”-re egyúttal:  $c + a = c + b$
- 5 $_{\gamma}$ . Ha valamely „a” és „b”-re  $a = b$ , úgy minden „c”-re egyúttal:  $a \cdot c = b \cdot c$
- 5 $_{\delta}$ . Ha valamely „a” és „b”-re  $a = b$ , úgy minden „c”-re egyúttal:  $c \cdot a = c \cdot b$
- 6.  $a + 0 = a$
- 7.  $a + Sb = S(a + b)$
- 8.  $a \cdot 0 = 0$
- 9.  $a \cdot Sb = a \cdot b + a$

### 2.3. Megjegyzések.

- a) Dolgozatunkban RA-nak S.C.Kleene féle változatára [3] támaszkodunk. (Raphael Robinson eredeti dolgozatának tömör összefoglalója [6] -ban található).

- b) **RA** ellentmondás-mentessége és ugyanakkor eldönthetetlen (valamint nem-teljes) volta az irodalomból jól ismert, ezekkel kapcsolatban [3]-ra és [7]-re hivatkozunk.
- c) **RA** jól látható módon **PA** „maradék axiómarendszerét” képezi, ugyanis:
  - **RA**  $1_\alpha$ . axiómája a rekurzív bizonyítás **PA**-beli 1. axiómájánál lényegesen kevesebbet állít,
  - **RA**  $5_\alpha$ ,  $5_\beta$ ,  $5_\gamma$  és  $5_\delta$  axiómái pedig **PA** közvetlen következményei.
- d) Mindebből következően **RA** lényegesen általánosabb **PA**-nál, hiszen keretein belül a klasszikus aritmetika olyan triviális összefüggései sem bizonyíthatóak, mint például:
  - a természetes számok rendezettségének tétele, vagy
  - a  $T(x)$  tulajdonságú legkisebb természetes szám létezése.

#### 2.4. Az új koncepció körvonalai.

Ahhoz, hogy az aritmetika új, általános elméletén belül megteremtsük az esélyét a **PA**-ban megszokott bizonyítási hatékonyságnak és eleganciának: koncepcionális szemléletváltásra, és új bizonyítási technikára van szükség. Ennek az új koncepciónak az a lényege, hogy tudomásul véve **RA** nyilvánvaló korlátjait:

- nem arra koncentrálunk, hogy a klasszikus aritmetika alapvető tételeit minden **RA**-n belüli természetes számra bebizonyítsuk,
- hanem inkább arra, hogy az aritmetika minden egyes tételéhez meghatározzuk mindazon természetes számok körét, amin belül a szóban forgó tétel valóban érvényes.

### 3. A természetes számok új, általános aritmetikája

#### 3.1. A természetes számok három alapvető tartománya.

Az aritmetika előző pontban körvonalazott új koncepciója alapján az **RA** tárgyát képező természetes számok precízen elkülöníthető alábbi három tartományát különböztetjük meg:

- természetes számok,
- kardinális számok, valamint:
- principális számok

További vizsgálatunk tárgyát az általános aritmetikán belül kitüntetett szerepet játszó kardinális számok és principális számok tartományának precíz meghatározása, és e számtartományokra külön-külön érvényes aritmetikai tételek ismertetése képezi.

#### 3.2. Kardinális számok.

A kardinális számok a természetes számok olyan tartományát képezik, melyen belül az aritmetika klasszikus elméletből ismert legalapvetőbb összefüggései — kevés



kivétellel — érvényesek, nevezetesen:

- az „S” tovább számlálással, valamint a „+” összeadással és a „·” szorzással szemben zártak,
- az összeadás és szorzás alapműveleteire rendre biztosítják az:
  - asszociativitás,
  - kommutativitás és
  - disztributivitás klasszikus elméletből ismert azonosságait,
- a klasszikus elmélet mintájára rendezettek,
- minden „a” és „b” ( $b \neq 0$ ) kardinális számhoz egyértelműen előállítják az „a = q · b + r” egyenlőséget kielégítő „q” hányadost és az „r” ( $\leq b$ ) maradékot.

Bizonyítható, hogy a kardinális számok előbbiekben körvonalazott tartománya valóban létezik, nevezetesen **RA** rendszer keretein belül egyértelműen definiálható az a **K**(a) tulajdonság és az a **K** tartomány ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), amely azokat és csakis azokat az „a” természetes számokat tartalmazza, amelyek **K<sub>n</sub>**(a) tulajdonságúak, és amelyekre az alábbi összefüggések teljesülnek:

- (a) Minden **K**-beli „a” és „b”-re „a + b” is **K**-beli
- (b) Ha „a” **K**-beli, és  $(x \leq a)$ , úgy „x” ugyancsak **K**-beli
- (c) Ha „a” és „b” **K**-beli, úgy **K** rendezett, azaz vagy  $(a \leq b)$ , vagy  $(a \geq b)$
- (d) Ha „a” és „b” **K**-beli, továbbá  $(a \leq b)$  és  $(a \geq b)$  együttesen teljesül, úgy  $(a = b)$
- (e) Ha „a”, „b” és „c” **K**-beli, továbbá  $(a + c = b + c)$  teljesül, úgy  $(a = b)$
- (f) Ha „a”, „b” és „c” **K**-beli, akkor  $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (g) Ha „a” és „b” **K**-beli, akkor  $a + b = b + a$
- (h) Ha „a”, „b” és „c” **K**-beli, akkor  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- (i) Ha „a”, „b” és „c” **K**-beli, akkor  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- (j) Ha „a” és „b” **K**-beli, akkor  $a \cdot b = b \cdot a$
- (k) Ha „a” és „b” **K**-beli, továbbá  $b \neq 0$ , akkor van „q” és „r” ( $< b$ ), hogy  $a = q \cdot b + r$
- (l) A **K**-beli „a” és „b”-hez van olyan „x” és „y”, hogy vagy  $a \cdot x = b \cdot y + 1$  ( $1 \equiv S0$ ), vagy pedig: „a”-nak és „b”-nek van 1-től különböző közös osztója.
- (m) Minden **K**-beli „a” és „b”-re „a · b” is **K**-beli.

Önmagában is figyelemre méltó körülmény, hogy a bizonyítottan ellentmondásmentes **RA** rendszerben mindezen összefüggések a kardinális számok teljes körére érvényesek, és bizonyíthatóak.

**K**(a) formalizmusra épülő definíciós egyenletei a függelékben találhatók, a fenti tételek bizonyításának ismertetésétől azonban azok terjedelme miatt el kellett tekintünk. Helyette megelégszünk azzal, hogy a 2.4. pontban jelzett új koncepció illusztrálására felvázoljuk a (j) tétel bizonyításának gondolatmenetét.

Tételezzük fel, hogy a függelék szerinti definíciós lánc során már eljutottunk az  $I_0, I_1, \dots, I_4$  tartományokig, és ezekre már bebizonyítottuk az (f), (g), (h) és (i) összefüggéseket.

Definiáljuk most  $I_5$  tartományt azon, s csakis azon  $I_4$  tartományba tartozó „a” természetes számok összességéeként, melyekre minden  $I_4$ -beli „x”-re az alábbi összefüggés fennáll:

$$(j^*) \quad a \cdot x = x \cdot a$$

Ezt a definíciót az emeli egyúttal (j) levezetésének rangjára, hogy:

- egyfelől nyilvánvalóan  $I_5 \subseteq I_4$ , és így minden  $I_5$ -beli „a” és „b” számra  $(j^*)$  fennáll,
- másfelől könnyen bebizonyítható, hogy a  $(j^*)$ -val definiált  $I_5$  tartomány tartalmazza a „0” és „S0” elemeket, valamint minden  $I_5$ -beli „a” és „b”-re az „a + b” elemet is (az „a · b” elem tartalmazását majd csak a végső, **K** tartomány definíciója biztosítja), következésképpen a  $(j^*)$ -ot kielégítő „ $I_5$ ” ily módon a természetes számoknak egy „végtelen” tartományát képezi.

### 3.3. Principális számok.

A principális számok mindazon „i” természetes számok tartományát képezik, melyek

- a továbbbszámlálás „S” műveletével szemben zártak,
- lehetővé teszik a rekurzív függvények (és ezek körében az  $e(a, i) = a^i$  hatványfüggvénynek) **RA** rendszer keretein belüli korrekt értelmezését,
- a klasszikus elméletben bizonyítható aritmetikai tételek tetszőleges sorozatára biztosítják a rekurzív bizonyítás módszerének alkalmazhatóságát.

Bizonyítható, hogy a principális számok ily módon meghatározott tartománya valóban létezik, nevezetesen **RA** rendszer keretein belül egyértelműen definiálható az a  $P(i)$  tulajdonság és az a „**P**” tartomány, amely azokat és csakis azokat az „i” természetes számokat tartalmazza, amelyek  $P(i)$  tulajdonságúak, és amelyekre az alábbi összefüggések teljesülnek:

- (n) Minden **P**-beli „i”-re  $Si \equiv i + 1$  ugyancsak **P**-beli
- (p) Ha „d” **K**-beli, „i” pedig **P**-beli természetes szám, akkor van olyan **K**-beli „c”, ami  $(x \leq i)$  mellett „közös többszöröse” az  $(x \cdot d + 1)$  kifejezésnek.
- (q) Ha „c” **K**-beli, „d” és „α”  $K_{n+1}$ -beli, „i” pedig **P**-beli természetes számok, akkor mindig található olyan **K**-beli „γ” természetes szám, amire  $(x \leq i)$  mellett teljesül az

$$\beta(c, d, x) = \beta(\gamma, \alpha \cdot d, x)$$

összefüggés, ahol  $\beta(c, d, i)$  a rekurzió elméletéből jól ismert Gödel féle függvény, ami a „c” kardinális szám „ $x \cdot d + 1$ ”-vel való osztásának a „maradékát” állítja elő [3].

- (r) Ha „c”, „d” és „w” **K**-beli, „i” pedig **P**-beli természetes számok, akkor mindig található olyan **K**-beli „c\*” és „d\*” természetes szám, amellyekkel

$$\beta(c^*, d^*, x) = \beta(c, d, x) \quad \text{valahányszor } (x \leq i), \text{ és}$$

$$\beta(c^*, d^*, Si) = w$$

- (s) Ha „i” **P**-beli, „k” pedig bármilyen, **P**-be nem tartozó természetes szám, akkor:  $(i < k)$

**P**(i) formalizmusra épülő definíciói a függelékben található, a fenti tételek bizonyításának ismertetésétől pedig azok terjedelme miatt el kellett tekintenünk.

A principális számok tartománya is további partíciókra osztható. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy

- minden rekurzíven definiált  $f(a, b, \dots, i)$  függvény meghatározza a principális számoknak azt a **P<sub>f</sub>** tartományát, amin belül  $f(a, b, \dots, i)$  ténylegesen definiált, továbbá
- minden rekurzíven bizonyítható **T**(i) tulajdonság meghatározza a principális számoknak azt a **P<sub>T</sub>** tartományát, amin belül **T**(i) ténylegesen bizonyított.

A fenti **P<sub>f</sub>** és **P<sub>T</sub>** tartományokkal, valamint ezek tetszőleges sorozatának közös részével meghatározott természetes számokat a továbbiakban — az egyszerűség kedvéért — egységesen principális számoknak nevezzük.

### 3.4. A rekurzió elmélete.

A következőkben megmutatjuk, hogy a kardinális számok, valamint a principális számok előbbi definíciói alapján **RA** keretein belül mind a rekurzív függvénydefiníció, mind pedig a rekurzív bizonyítás az aritmetika klasszikus elméletét felidéző módon végezhető el.

Az „ $f(a, b, \dots, i)$ ” függvényt rekurzívnek nevezzük, ha az alábbi összefüggések definiálják:

$$(1) \quad f(a, b, \dots, 0) = q(a, b, \dots)$$

$$(2) \quad f(a, b, \dots, Si) = r[f(a, b, \dots, i), a, b, \dots, i]$$

ahol  $q(a, b, \dots)$  és  $r(y, a, b, \dots, i)$  elemi aritmetikai függvények (azaz kizárólagosan az „S”, „+” és „” alapműveletekkel meghatározottak), vagy pedig már korábban definiált *rekurzív függvények* segítségével képzett összetett aritmetikai kifejezések.

- Az (1) és (2) összefüggéseket kielégítő  $f(a, b, \dots, i)$  rekurzív függvényt (Gödel nyomán) **RA** rendszer alábbi aritmetikai kifejezésével állítjuk elő [3]:

$$(3) \quad f(a, b, \dots, i) \equiv \beta(c, d, i)$$

amely megfelelően választott „c” és „d” mellett az  $x \leq i$  tartományban kielégíti az (1) és (2) összefüggések (3)-nak megfelelő alábbi „átiratát”:

$$(4) \quad \beta(c, d, 0) = q(a, b, \dots)$$

$$(5) \quad \beta(c, d, Sx) = r[\beta(c, d, x), a, b, \dots, x]$$

- A principális számok  $P_f$  tartományát azon „i” principális számok összességéeként definiáljuk, melyekre minden  $0 \leq x \leq i$  mellett teljesülnek a (4) és (5) összefüggések.
- Bizonyítható, hogy a principális számok így definiált  $P_f$  tartománya (partíciója) valóban létezik  $RA$ -ban, és hogy e tartományon belül az alábbi összefüggések teljesülnek:
  - (t) Ha „i”  $P_f$ -beli, úgy „Si” ugyancsak  $P_f$ -beli.
  - (u) Ha „y”, „a”, ...  $K$ -beli, „i” pedig  $P_f$ -beli, úgy van olyan  $K$ -beli „c” és „d” természetes szám, hogy  $\beta(c, d, x)$ -re  $x = 0$  mellett (4),  $0 < x \leq i$  mellett pedig (5) fennáll.
  - (v) Ha „y”, „a”, ...  $K$ -beli, „i” pedig  $P_f$ -beli természetes szám, és  $q(a, b, \dots)$  valamint  $r(y, a, \dots, i)$  egyértelműen meghatározottak, akkor a (v) szerinti  $\beta(c, d, x)$  az  $x \leq i$  tartományban egyértelműen állítja elő  $f(a, b, \dots, i)$  függvényt.

$P_f(i)$  formalizmusra épülő definíciója a függelékben található, a fenti tételek bizonyításának ismertetésétől azonban azok terjedelme miatt el kellett tekintenünk.

A hatványozás  $e(a, i) = a^i$  műveletét az alábbi összefüggésekkel definiáljuk:

$$(6) \quad e(a, 0) = S0$$

$$(7) \quad e(a, Si) = e(a, i) \cdot a$$

ahol  $e(a, i)$  függvényértéke, valamint „a”  $K$ -beli kardinális szám, és a hatványfüggvény értelmezési tartományát az előbbiek szerint meghatározott  $P_e$  tartomány képezi.

Bizonyítható, hogy a (6) és (7) összefüggéseket kielégítő  $e(a, i) = a^i$  függvényre  $RA$ -ban az:

$$(8^*) \quad a^{i+j} = a^i \cdot a^j$$

$$(8^{**}) \quad (a^i)^j = a^{i \cdot j}$$

egyenlőség minden  $K$ -beli „a”-ra, valamint  $P_e$ -beli „i”-re és „j”-re fennállnak.

Megjegyzés: A bemutatott módszer nyomán definiálható mindazon „i” természetes számok  $P_\Phi$  tartománya is, melyekre a „faktoriális” függvény alábbi rekurziós összefüggései fennállnak:

$$(9) \quad \Phi(0) = 1$$

$$(10) \quad \Phi(Si) = \Phi(i) \cdot (i + 1)$$

Könnyen bebizonyítható, hogy az így definiált  $P_{Phi}$ -re azonban „(n)” akkor, és csakis akkor teljesül, ha a  $P_e$  tartomány a (6)-(7) szerinti hatványozással szemben zárt (lásd.: 4.3. pont).

Definiáljuk  $P_T$  tartományt azon, és csakis azon „i” principális számok összességéként, melyekre a  $T(x)$  tulajdonság  $RA$ -ban minden  $(x \leq i)$  természetes számra bizonyítható. Bizonyítható, hogy a principális számok ily módon definiált  $P_T$  tartománya valóban létezik  $RA$ -ban, és hogy e tartományon belül teljesül az alábbi tétel:

- (w) Ha  $RA$ -ban  $T(0)$ , és minden  $P_T$ -beli „i”-re  $T(i)$ -ből következően  $T(Si)$  is bizonyítható, akkor  $P_T$  tartományban minden „i” principális szám  $T(i)$  tulajdonságú.

Minden különösebb indokolás nélkül nyilvánvaló, hogy az előző (w) tétel a rekurzió axiómájának  $RA$ -beli megfelelőjeként értelmezhető.

$P_T(i)$  formalizmusra épülő definíciója függelékben található, a (w) tétel bizonyításának ismertetésétől azonban annak terjedelme miatt el kellett tekintenünk.

#### 4. PA ellentmondásosságának hipotézise

##### 4.1. Kis természetes számok.

Az előző pontban meghatározott  $e(a, i) = a^i$  hatványfüggvény  $P_e$  értelmezési tartományának, valamint a  $P_{f_1}, P_{f_2}, \dots$  és  $P_{T_1}, P_{T_2}, \dots$  tartományok tetszőlegesen választott sorozatának  $P_\Omega$  közös részébe tartozó principális számokat — definíció szerint — „kis természetes számoknak” nevezzük.

Az így definiált „kis természetes számokról” könnyen belátható, hogy tartományukon belül

- az (a), (b),  $\dots$ , (v), (w) összefüggések maradéktalanul teljesülnek,
- a továbbszámlálás, összeadás és szorzás műveletén kívül a hatványozás is értelmezhető,
- a rekurzió elmélete kielégítő módon megalapozható,

következésképpen a „kis természetes számok” körében  $RA$  jó közelítéssel „visszaadja” a Peano axiómarendszeren alapuló klasszikus aritmetikát.

##### 4.2. Nagy természetes számok.

Az „i” természetes számot, akkor, és csakis akkor nevezzük „nagy természetes számnak”, ha az nem tartozik a „kis természetes számok” tartományába.

Hogy az így definiált „nagy természetes számok” (ha léteznek ilyenek) szemléletmódunknak és mai ismereteinknek (azaz a Peano aritmetikának) ellentmondóan viselkednek, azt az alábbi három,  $RA$ -ban könnyen igazolható alapvető tulajdonsággal szemléltetjük:

- A „nagy természetes számok” körében nincs legkisebb szám, azaz hogy ott minden „nagy természetes számot” ugyancsak „nagy természetes szám” előz meg.

- A „nagy természetes számok” nagyobbak minden „kis természetes számnál”  $P_e$  tartomány előző pont szerinti definíciójából, valamint (s) tételből kiindulva nem nehéz bizonyítani, hogy állításunknak megfelelően  $RA$ -ban a „nagy természetes számok” valóban nagyobbak minden „kis természetes számnál”
- A rekúzió axiómája nem terjeszthető ki a „nagy természetes számok” körére. Az állítás igazolására elegendő, ha a tételt a  $T(i) \equiv P_\Omega(i)$  tulajdonság esetére vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy annak dacára, hogy ebben a számtartományban az alábbi két tétel könnyen levezethető

(9)  $P_\Omega(0)$

(10) Ha  $P_\Omega(x)$  valamely „i” mellett minden  $x \leq i$   
természetes számra teljesül, úgy  $P_\Omega(x)$  minden  
 $x \leq Si$  természetes számra is teljesül.

mégsem következik, hogy  $P_\Omega(x)$  minden „x”-re teljesül, hiszen a „nagy természetes számok”-ra (azok definíciójából következően)  $P_\Omega(x)$  eleve nem is teljesülhet.

#### 4.3. $RA$ alaptétele.

Megmutatjuk, hogy  $RA$  alábbi (a „nagy természetes számok” létezését ki-mondó) „alaptétele” levezethető:

- (11) Van olyan  $P_\Omega$ -beli „a” és „i” természetes szám, amihez (6) és (7) szerint hozzátartozó „a” kifejezés nagyobb minden  $P_\Omega$ -beli „x” természetes számnál.

A bizonyítás részleteinek az ismertetésétől eltekintünk, helyette megelégszünk a meglehetősen összetett gondolatmenet legfontosabb lépéseinek alábbi összefoglalásával:

- Először bebizonyítjuk azt a segéd-tételt, hogy ha (11) levezethető  $RA$ -ban, akkor a természetes számoknak létezik olyan  $P_\Theta$  tartománya, melynek elemei kielégítik a Peano axiómákat, és így ott —  $RA$  ellentmondás-mentessége alapján — közvetlenül igazolják  $PA$  ellentmondás-mentességét.
  - (11) ellenkezője mint  $RA$  alábbi tétele fejezhető ki
- (12) Minden  $P_\Omega$ -beli „a” és „i” természetes számhoz az „a” kifejezés ugyancsak mindig  $P_\Omega$ -beli természetes számot áll elő.
- Amennyiben (12) levezethető, úgy a rekurzív függvények előző pontban bemutatott elmélete, valamint Gödel közismert módszere alapján minden aritmetikai állítást kifejező tulajdonsághoz, így a szabad „i” változót tartalmazó  $P_T(i)$  tulajdonsághoz is  $RA$ -ban egy-egy „k” kardinális szám rendelhető [3], [4].

Megjegyzés: (12) nélkül ez a hozzárendelés (a „faktoriális” függvényre tett korábbi megjegyzés miatt) **RA**-ban nem garantálható.

- $P_T(i)$  tulajdonságot a továbbiakban  $P(i, k)$ -val jelölve (ahol „ $k$ ” érték a „ $P_T(i)$ ” tulajdonság Gödel-számát képviseli) képezzük a következő összetett tulajdonságot:

$$P_\Theta(i) \equiv \forall x \{P(0, x) \& \forall y [P(y, x) \supset P(Sy, x)] \supset \forall y [(y \leq i) \supset P(y, x)]\}$$

- Könnyen bizonyítható, hogy az ily módon bevezetett  $P_\Theta(i)$  — mint az összes lehetséges, és egyben a rekurzió axiómáját is kielégítő  $P_T(i)$  tulajdonságok „közös” része — **RA**-ban precízen definiálható, következésképpen az általa meghatározott  $P_\Theta$  tartományban a rekurzió axiómája érvényes.
- Felhasználva ezt az eredményt nem nehéz bizonyítani, hogy  $P_\Theta$  a továbbszámlálás, az összeadás és a szorzás műveleteivel szemben „zárt” tartományt képez, azaz hogy  $P_\Theta$  tartomány elemei ténylegesen kielégítik a Peano axiómákat.
- Másfelől már említettük, hogy **RA** ellentmondás-mentes, következésképpen ha (12) **RA**-ban levezethető, úgy az egyúttal közvetlenül igazolja **PA** ellentmondás-mentességét is.
- Másodszor megmutatjuk, hogy az előbbi segéd-tétel **RA**-ban ellentmondásra vezet.
  - A segéd-tételből következően tehát **PA** ellentmondás-mentessége **RA**-ban bizonyítható.
  - A 2.3. pontban mondottak alapján könnyen igazolható, hogy **PA** közvetlenül származtatható **RA**-ból, vagyis hogy ily módon **RA** minden levezethető tétele (így ezek körében az előbbi segéd-tétel is) egyúttal levezethető **PA**-ban.
  - Következésképpen a segéd-tétel következménye (azaz **PA** ellentmondás-mentességének **PA**-beli igazolása) ellentmond Gödel második tételének.
- Az így kapott ellentmondás a „reductio ad absurdum” következtetés-mód alapján végül is a (11) „alaptétel” bizonyítását eredményezi.

#### 4.4. **RA** alaptétele egy **PA**-beli ellentmondást demonstrál.

- Az előző pontban láttuk, hogy **RA** minden levezethető tétele, így ezek körében **RA** alaptétele is, egyúttal levezethető **PA**-ban.
- **PA**-ból ugyanakkor könnyen levezethető **RA** alaptételének tagadása, azaz (12) állítás is.
- Az előbbi két, egymásnak ellentmondó állítás bizonyítása összességében azt igazolja, hogy
  - a rekurzió axiómája ellentmond **RA**-nak, következésképpen
  - a Peano aritmetika, azaz **PA** (ami a rekurzió axiómájával kiegészített **RA**-ként kapható) kétség kívül ellentmondásos.

## 5. PA ellentmondásosságának kísérleti bizonyítására

### 5.1. Kiinduló megfontolások.

PA előző pontban bemutatott ellentmondásához aligha férhet kétség. Lévén azonban, hogy ez a demonstráció meglehetősen összetett, nehezen áttekinthető, és ráadásul a formális rendszer kereteit meghaladó metaelméleti módszereket is tartalmaz (de nem többet, mint amennyit Gödel közismert bizonyítása is tartalmaz), ezért sokkal egyértelműbb volna ennek az ellentmondásnak egy közvetlen számítási kísérleten alapuló igazolása.

Az ellentmondás számítási kísérlettel való igazolásának ötlete az alábbiakra vezethető vissza:

- először is az ellentmondás felszínre hozásában amúgy is elsődleges szerepet játszó **RA** alaptételre, aminek értelmében kell, hogy legyen olyan „ $n_0$ ” principális szám, amire „ $2^{n_0}$ ” nagyobb minden lehetséges principális számnál,
- másodszor arra a körülményre, hogy a klasszikus matematika számos olyan, a racionális számok körében értelmezett számsort ismer, ami „ $0$ ”-hoz konvergál,
- harmadszor arra, hogy míg ezen számsorok numerikus meghatározása  $2^{-n}$  pontosságú, addig az előbbi konvergencia **RA**-n belüli bizonyítása csak  $\frac{1}{m}$  pontosságú,
- végül pedig arra, hogy a szóban forgó számsorok numerikus értékeinek „ $0$ ”-hoz való konvergálása ily módon csak úgy garantálható, ha minden „ $n$ ” természetes számhoz található olyan „ $m$ ”, amire „ $2^n$ ” kisebb „ $m$ ”-nál, amit pedig **RA** alaptételére hivatkozással épp most vitatunk.

### 5.2. Bizonyítási kísérlet.

Az alábbiakban bemutatunk egy konkrét bizonyítási kísérletet, amelytől a Peano aritmetika ellentmondásosságának tényleges igazolását várjuk.

- A bizonyítási módszer a modern matematikának a „nevezetes konstansok” (például: „ $\pi$ ”, „ $e$ ”, stb.) meghatározására és numerikus kiszámítására felfedezett legújabb algoritmusaira támaszkodik. A „PSLQ” technikára épülő módszer, és néhány különösen érdekes algoritmus ismertetésére az Interneten hozzáférhető [8] és [9] irodalmi forrásokra hivatkozunk.
- A konkrét bizonyításhoz az ugyancsak nevezetes „ $0$ ” konstanst előálító (a közelmúltban felfedezett) alábbi formulát választjuk:

$$(13) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left( \frac{8}{8k+1} - \frac{8}{8k+2} - \frac{4}{8k+3} - \frac{8}{8k+4} - \frac{2}{8k+5} - \frac{2}{8k+6} + \frac{1}{8k+7} \right) = 0$$



- E formula felfedezésével, valamint rendkívül kedvező adottságainak és lehetőségeink az ismertetésével kapcsolatban [9] irodalmi forrásra hivatkozunk. Az ott részletesen ismertetettek közül most itt csak egy nevezetes körülményt ragadunk ki, mégpedig azt a tényt, hogy ahhoz, hogy a (13) formulával meghatározott racionális számnak kiszámítsuk a (mondjuk)  $10^{10}$ -ik „bináris” számjegyét, nem kell az egész számítást elvégeznünk, hanem elég, ha csak erre a számjegyre koncentrálnunk, amivel így jelentős időt és energiát takarítunk meg.
- A konkrét bizonyítási kísérlethez definiáljuk az alábbi véges számsort:

$$(14) \quad B(n) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{16^k} \left( \frac{8}{8k+1} - \frac{8}{8k+2} - \frac{4}{8k+3} - \frac{8}{8k+4} - \frac{2}{8k+5} - \frac{2}{8k+6} + \frac{1}{8k+7} \right)$$

- **RA**-ban (a „racionális számok” bevezetésével és a „véges integrál” módszerével) bizonyítható az alábbi összefüggés

$$(15) \quad |B(n)| - \frac{4}{16^n} = \Omega(n) \leq \frac{\Delta}{m}$$

ahol  $m = 0, 1, 2, \dots$  a „véges integrál” tárgyát képező intervallum felosztásainak számát jelöli.

- A Peano aritmetikában ebből közvetlenül eljuthatunk a klasszikus matematikából jól ismert alábbi összefüggéshez:

$$(16) \quad |B(n)| - \frac{4}{16^n} = \Omega(n) \leq 0$$

- Lévén, hogy **RA** alaptételéből következően van olyan „n” amelynél minden „m”-re „2”-nél kisebb „m”-nél, így **RA**-ban (16) teljesülése nem, hogy nem garantált, de a mondottakból következően nem is látszik valószínűnek.
- A kísérlet lényegét a (15) és (16) közötti különbségtétel eldöntése képezi, nevezetesen az, hogy a (15)-ben szereplő  $\Omega(n)$  kifejezésre valamely  $n = n_0$  paraméter-választás mellett teljesül-e a (16)-val ellentétes alábbi összefüggés:

$$(17) \quad \Omega(n_0) > 0$$

- Könnyen belátható, hogy az  $\Omega(n)$  kifejezés „konkrét” értéke számítógéppel támogatott numerikus számítások eredményeként a principális számok minden (elvben bármilyen „nagy”) „n” értékére egyértelműen meghatározható.
- A kísérlet során egyre nagyonn és nagyobb „n” értékekhez sorra kiszámítjuk a (14)-vel és (15)-vel meghatározott  $\Omega(n)$  függvényértéket, amíg (17)-et kielégítő egyenlőtlenségre, és általa a Peano aritmetika egy numerikus számításokkal igazolt ellentmondására nem jutunk.

### 5.3. A kísérlet sikeres végrehajtásának kérdései.

Kísérletünk sikeres végrehajtásának két okból is elengedhetetlen részét képezik a számítógéppel támogatott numerikus számítások. Egyfelől azért, mert a számítógépek „bináris” számábrázolása jól követi a kardinális és racionális számok tulajdonságait, és felépítéséből adódóan eleve túllépi a principális számok szűkebb körét, másfelől pedig azért, mert a (19) ellenőrzéséhez szükséges, minden bizonnyal nagyvolumenű számítások tényleges elvégzésére nem is volna másképpen esély.

A kísérlet „könnyű” sikerét illetően nem lehetnek illúzióink, hiszen a (19) összefüggést kielégítő „n” principális számok nagyságrendje Y.Kanada és Y.Tamura vizsgálatai [10] alapján aligha lehet kisebb, mint  $n_0 \geq 10^{10}$  nagyságrendű. Ahhoz, hogy (19)-et az  $n_0 \geq 10^{10}$  tartományban (14) tényleges kiszámításával vizsgálhasuk, olyan volumenű számítások elvégzésére van szükség, ami mai számítástechnikai lehetőségeink mellett egyértelműen lehetetlen.

A kísérlet  $n_0 \geq 10^{10}$  tartományban történő elvégzésére azért van mégis remény, hogy itt (19) ellenőrzéséhez nem kell a numerikus számításokat teljes körűen elvégezni, elegendőnek ígérkezik „csak” valahol a  $10^{10}$ -ik tartományba eső számjegyek meghatározása, ami [9] szerint lényegesen egyszerűbb, és talán már az ezredfordulóra reálisan kivitelezhető feladat.

## 6. Függelék

### 6.1. Kardinális számokat előállító ítéletfüggvény.

A kardinális számokat előállító „ $K(a)$ ” ítéletfüggvényt az egymásra épülő  $I_j(a)$  ítéletfüggvények alábbi sorozata segítségével definiáljuk:

$$I_0(a) \equiv \forall x \forall y [(x + y) + a = x + (y + a)] \& [0 + a = a] \& [S0 + a = a + S0]$$

$$I_1(a) \equiv I_0(a) \& \forall x [I_0(x) \supset (a + x = x + a)]$$

$$I_2(a) \equiv I_0(a) \& \forall x \forall y \{ I_0(x) \supset I_0(x \cdot a) \& [x \cdot (y + a) = x \cdot y + x \cdot a] \}$$

$$I_3(a) \equiv I_2(a) \& \forall x \forall y \{ I_0(x) \& I_0(y) \& I_0(x \cdot y) \supset$$

$$\supset I_0(y \cdot a) \& [x \cdot (y \cdot a) = (x \cdot y) \cdot a] \}$$

$$I_4(a) \equiv I_2(a) \& (0 \cdot a = 0) \& (S0 \cdot a = a) \& \forall x \forall y \{ I_0(x) \supset$$

$$\supset I_0(a \cdot x) \& [(y + a) \cdot x = y \cdot x + a \cdot x] \}$$

$$I_5(a) \equiv I_4(a) \& \forall x \{ I_4(x) \supset (a \cdot x = x \cdot a) \}$$

$$I_6(a) \equiv I_0(a) \& \forall x \forall y [(x + a = y + a) \supset$$

$$\supset (x = y)] \& \forall x \exists y [(x = y + a) \vee I_0(x) \& (a = y + x)]$$

$$I_7(a) \equiv \forall x \forall y [(a = x + y) \supset I_1(x) \& I_1(y) \& I_3(x) \& I_5(x) \& I_6(x)]$$

$$I_8(a) \equiv I_7(a) \& \forall x \exists q \exists r \{ I_7(x) \& (x \neq 0) \supset (a = q \cdot x + r) \& (r < q) \}$$

$$\begin{aligned}
I_9(a) &\equiv I_8(a) \& \forall a \forall b \forall g \exists x \exists y \exists z \{ I_8(a) \& I_8(b) \& I_8(g) \supset \\
&\supset (0 < x \leq a) \& (a \cdot x + b = g \cdot y + z) \& \forall u \forall v \forall w [(0 < u \leq a) \& \\
&\& (a \cdot u + b = g \cdot v + w) \supset (z \leq w)] \} \\
K(a) &\equiv \forall x \{ I_9(x) \supset I_9(a) \& I_9(a \cdot x) \}
\end{aligned}$$

### 6.2. Principális számokat előállító ítéletfüggvény.

A principális számokat előállító „ $P(i)$ ” ítéletfüggvényt az egymásra épülő  $J_k(i)$  ítéletfüggvények alábbi sorozata segítségével definiáljuk:

$$\begin{aligned}
J_0(i) &\equiv K(i) \& \forall d \exists c \forall x \exists y [(x \leq i) \& K(d) \supset K(c) \& (c = (x \cdot d + 1) \cdot y)] \\
J_1(i) &\equiv J_0(i) \& \forall c \forall d \forall a \exists g \forall x \{ (x \leq i) \& K(c) \& K(d) \& K(a) \supset \\
&\supset \exists w [K(\gamma) \& B(c, d, x, w) \& B(\gamma, a \cdot d, x, w)] \} \\
P(i) &\equiv J_1(i)
\end{aligned}$$

### 6.3. Rekurzív függvények értelmezési tartományát definiáló ítéletfüggvény.

A rekurzív függvények értelmezési tartományát az alábbi ítéletfüggvény-párossal definiáljuk:

$$\begin{aligned}
F(a, b, \dots, i, w) &\equiv \exists c \exists d \{ \exists u [B(c, d, 0, u) \& Q(a, b, \dots, u)] \& \\
&\forall x \exists u \exists v [(x < i) \supset B(c, d, Sx, u) \& B(c, d, x, v) \& \\
&R(v, a, \dots, i, u)] \& B(c, d, i, w) \} \\
P_f(i) &\equiv P_r(i) \& \forall y \forall a \dots \exists ! w \{ K(y) \& K(a) \& \dots \supset \\
&\supset K(w) \& F(a, b, \dots, i, w) \}
\end{aligned}$$

ahol  $P_r(i)$  az  $R(y, a, \dots, i, u)$  definiáló függvény értelmezési tartományának ítéletfüggvénye.

### 6.4. Rekurzív bizonyítások érvényességi körét definiáló ítéletfüggvény.

A rekurzív bizonyítások érvényességi körét definiáló ítéletfüggvény:

$$P_T(i) \equiv P(i) \& \forall x [(x \leq i) \supset T(x)]$$

## IRODALOM

- [1] NEUMANN, J., *Válogatott előadások és tanulmányok*, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1965.
- [2] WEYL, H., *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, University Press. 1926.
- [3] KLEENE, S.C., *Introduction to Metamathematics*, Nort-Holland Publishing Comp., Amsterdam, 1971.
- [4] RUZSA, IMRE, URBÁN, JÁNOS, *Matematikai logika*, Tankönyvkiadó, Budapest. 1966.
- [5] VAN DANTZIG, „Is  $10^{10^{10}}$  a Finite Number?”, *Dialectica* 9 (1955).
- [6] ROBINSON, R., „An Essentially Undecidable Axiom System”, *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*. Cambridge, Mass. USA, Aug. 30 - Sept. 6, 1950..

- [7] FEFERMAN, S., *Penrose' Gödelian Argument*, <http://psyche.cs.monash.edu.au/volume2-1/psyche-95-2-07-shadows-5-feferman.html>.
- [8] BAILY, D., BORWEIN, J., BORWEIN, P., *The Quest for Pi.*, [www.cecm.sfu.ca/~pborwein](http://www.cecm.sfu.ca/~pborwein).
- [9] ADAMCHIK, V., WAGON, S., *Pi: A 2000-Year Search Changes Direction*, [www.wri.com/victor/articles/pi/pi.html](http://www.wri.com/victor/articles/pi/pi.html).
- [10] KANADA, Y., TAMURA, Y., *Calculation of „pi” to 10,013,395 decimal places based on the Gauss-Legendre algorithm and Gauss arctangent relation.*, Computer Centre, University of Tokyo, 1983..

(Beérkezett: 1997. november 19.)

RÁZGA TAMÁS  
SZÁMALK-SOFTEC KFT.  
1115 BUDAPEST, ETELE ÚT 68.  
E-MAIL: RAZGATI@MAIL.MATAV.HU

# A NEW, GENERAL THEORY OF NATURAL NUMBERS, DISPUTING EVEN THE PEANO ARITHMETIC

T. RÁZGA

As the key issue of this paper, a new, general theory of natural numbers is presented. It will be demonstrated, that this new theory is consistent, gives a complete description without the axiom of recursion, and is valid even in the great values of natural numbers. This paper puts the whole question of the consistency of Peano arithmetic in a completely new light, namely it demonstrates one of its intrinsic contradiction. Finally an arithmetic formula is presented, which — according to our hypothesis — by its numerical calculation of great precision, can directly demonstrate the expected above contradiction.

# VÁZKIJELŐLŐ ALGORITMUSOK A DIGITÁLIS KÉPFELDOLGOZÁSBAN

FAZEKAS ATTILA

Debrecen

A digitális képfeldolgozásban vonalas ábrák feldolgozása során gyakran használatos a vázkijelölés. Ez a módszer a sajátságok kinyerését segíti el azzal, hogy eltérte a képet a feldolgozás szempontjából kedvezőbb alakra hozza. Ebben a dolgozatban egy rövid áttekintést adunk az irodalomban található különböző algoritmusokról, a vázkijelölés matematikai háttérérl és az ezzel kapcsolatos alapvető fogalmakról.

## 1. Bevezetés

A digitális képfeldolgozás közel hetven éves múlttal rendelkezik. A kezdeti problémák a digitális képek átvitele során adódtak. Az 1920-as évektől kezdődően a használt technikák fejlődésében nagy változást az rprogram hozott. A digitális képfeldolgozási technikákat azóta más területeken is használják. Példaként az orvosi, ipari, katonai és humán alkalmazásokat említhetjük [3,10,24].

A digitális képfeldolgozási eljárások alkalmazásuk szempontjából két alapvető csoportba sorolhatók. Az egyik csoport a képi információk átalakítása emberi feldolgozás számára kedvezőbb alakra. A másik az önálló gépi felismerés megvalósítása.

Az automatikus gépi felismerést megvalósító módszereket a szakirodalomban alapvetően három nagy csoportba sorolják [5]. Természetesen az egyes csoportok között nem lehet éles határvonalakat húzni. Ez a csoportosítás a felismerés folyamatát is tükrözi. Most tekintsük röviden át ezeket a csoportokat:

- Képtranzformáció. Ezen eljárások a digitális képen található képpontok tulajdonságai (pl. világosságuk) alapján az eredeti képből egy másik digitális képet (az ún. tranzformált képet) állítanak elő.
- Képelemzés. Az egyes objektumpontok együttes tulajdonságai alapján az általuk alkotott objektum, illetve háttér komponens legfontosabb jellemzőit állítják elő. Ezeket a jellemzőket sajátságoknak is nevezik.
- Képfelismerés. A sajátságok ismeretében egy tudásbázis segítségével „felismerik” a képen látható objektum(ka)t.

Egy objektum felbontása egyszerűbb és kisebb objektumokká gyakran hasznos a digitális képfeldolgozásban. A karakterfelismerésben — amely az alakfelismerés egy részterülete — gyakran használnak erre a célra egy speciális technikát, a vázkijelölést. Ez egy olyan speciális képelemző algoritmus, amelyik a digitális képet a sajátságok kinyeréséhez kedvezőbb alakra alakítja át. Az objektum vonalait, foltvonalait egy pixel vastagságú

Az OTKA 1994/895. és MKM 442/94 támogatásával készült .

vonallal helyettesíti, amely megközelítőleg az eredeti foltvonal középvonala. Ez a módszer nyilvánvalóan „vonalas” ábrák esetén alkalmazható sikeresen.

A váz kifejezi az eredeti objektum fő komponensei közötti szerkezeti összefüggéseket. Ez azt eredményezi, hogy a további feldolgozást a vázzal végezhetjük. Ezzel a felhasznált memóriát csökkenthetjük, az alakfelismeréshez szükséges adatszerkezetet egyszerűsíthetjük. Természetesen csökken a feldolgozási idő is. A vázkijelölő algoritmusok általában digitalizált, kétszintű képet várnak bemenetként és ugyanilyen típusú képet adnak eredményül.

Ebben a cikkben egy rendszerező jellegű áttekintést kívánunk adni a vázkijelölés irodalmáról. Rögzítjük ezen témakör megismeréséhez szükséges matematikai modelleket és fogalmakat. Az első fejezetben a legfontosabb matematikai ismereteket foglaljuk össze. A további fejezetekben a csoportosítás alapját a felhasznált matematikai módszer, illetve modell adja. A fejezetek sorrendje megközelítőleg az egyes módszerek időbeli sorrendjét is jelenti.

Ebben a témakörben hatalmas tömegű publikáció jelenik meg évente. Ehhez képest nagyon elenyésző számban jelenik meg összefoglaló, összehasonlító és áttekintő jellegű cikk [17,33]. Tudomásunk szerint magyar nyelven ilyen jellegű munka korábban nem jelent meg. Ezt a hiányt szeretnénk pótolni munkánkkal, amely elősegítheti a magyar szakkifejezések elterjedését is.

## 1. Alapvető fogalmak

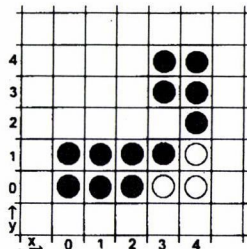
**1.1. Definíció.** A  $Z^2$  halmazt **digitális síknak**, elemeit **képpontoknak** (vagy röviden pontoknak) nevezzük. A digitális sík egy véges részhalmazát **digitális halmaznak** nevezzük. Egy  $D$  digitális halmaz feletti  $n$ -szintű **digitális kép** alatt egy olyan  $f$  függvényt értünk, amely a  $D$ -t a  $R = \{0, 1, \dots, n-1\}$  halmazba képezi. A  $R$  halmaz elemeit **világosság kódoknak** nevezzük. Az  $n = 2$  esetén a **bináris kép** elnevezés is használatos. Egy  $f$  bináris kép **előtérén** az  $F = \{P \in D | f(P) = 1\}$ , a **háttérén** a  $B = \{P \in D | f(P) = 0\}$  halmazt értjük. Az előtér pontjait **objektumpontoknak**, a háttér pontjait **háttérpontoknak** nevezzük.

**1.2. JELÖLÉS.** A későbbiekben, ha egy digitális halmaz  $P$  pontjának koordinátáit is fel kívánjuk tüntetni, akkor azt a  $P(i, j)$  alakban fogjuk megtenni.

**1.3. Definíció.** Legyen  $P(i, j)$  és  $Q(k, l)$  ugyanazon digitális halmaz két pontja. A  $Q$  a  $P$  **4-szomszédja**, ha a koordinátákra teljesül, hogy  $|i - k| + |j - l| = 1$ . A 4-szomszéd helyett használhatjuk a **közvetlen szomszéd** elnevezést is. Ha a koordinátákra a fenti egyenlőség helyett az  $|i - k| = |j - l| = 1$  teljesül, akkor a  $Q$  a  $P$  **közvetett szomszédja**. A közvetlen és közvetett szomszédokat együttesen **8-szomszédoknak** nevezzük.

Az irodalomban általános módszer a  $D$ ,  $F$  és  $B$  digitális halmazok szemléltetésére az alábbi grafikus reprezentáció:

Ahol  $\circ$  a háttérpontokat,  $\bullet$  az objektumpontokat és ezek együttesen a vizsgált digitális halmaz pontjait jelölik.



1. ábra

Most tekintsünk egy egyszerű példát a fenti fogalmak szemléltetésére. Legyen a  $D$  digitális halmaz a következőképpen definiálva:  $D = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1), (4,2), (3,3), (4,3), (3,4), (4,4)\}$ . Legyen  $f$  egy  $D$  feletti bináris kép, amely rendelkezik a következő tulajdonsággal:

$$\forall P \in D \text{ esetén } f(P(x,y)) = \begin{cases} 1 & , \text{ ha } |x-y| \leq 2 \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor az  $f$  bináris kép előtere az  $F = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,2), (3,3), (4,3), (3,4), (4,4)\}$  digitális halmaz lesz. Nyilvánvalóan a háttért a  $B = D \setminus F = \{(3,0), (4,0), (4,1)\}$  összefüggéssel kaphatjuk meg.

A  $(3,1)$  koordinátájú pont közvetett szomszédja a  $(4,2)$  koordinátájú pontnak. A  $(0,0)$  koordinátájú pont közvetlen szomszédja a  $(0,1)$  koordinátájú pontnak. Egy  $P$  pont 8-szomszédainak (4-szomszédainak) halmazát  $N_8(P)$ -vel ( $N_4(P)$ -vel) szokás jelölni. Például:  $N_4(P(3,1)) = \{(2,1), (3,0), (4,1)\}$  és  $N_8(P(3,1)) = \{(2,1), (2,0), (3,0), (4,0), (4,1), (4,2)\}$ .

Nyilvánvalóan, ha  $P$  és  $Q$  egy  $D$  digitális halmaz pontjai és  $P$  8-szomszédja (4-szomszédja)  $Q$ -nak, akkor  $Q$  is 8-szomszédja (4-szomszédja)  $P$ -nek.

**1.4. Definíció.** Legyen  $U$  és  $V$  digitális halmaz. Az  $U$ -t a  $V$  8-szomszédjának (4-szomszédjának) nevezzük, ha  $\exists P \in U$  és  $\exists Q \in V$  úgy, hogy  $P$  8-szomszédja (4-szomszédja)  $Q$ -nak az  $U \cup V$  halmazon.

**1.5. Definíció.** Legyen  $D$  egy digitális halmaz,  $X$  és  $Y$  annak tetszleges pontja. Egy  $n$  ( $n \in \mathcal{N} \cup \{0\}$ ) hosszúságú  $X$ -bl  $Y$ -ba tartó 8-útnak (4-útnak) nevezzünk egy olyan  $X = X_0, X_1, \dots, X_{n-1} = Y$  pontsorozatot, melyben  $X_i$  8-szomszédja (4-szomszédja)  $X_{i-1}$ -nek ( $0 < i \leq n-1$ ) és  $X_i \in D$ .

A korábbi példánk jelöléseit felhasználva az  $F$  halmazt bontsuk fel a következőképpen:  $U = \{(0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1)\}$ ,  $V = \{(4,2), (3,3), (4,3), (3,4), (4,4)\}$ . Az  $U$  a  $V$  8-szomszédja lesz, mert  $P(3,1) \in U$ ,  $Q(4,2) \in V$  és  $P$  8-szomszédja  $Q$ -nak. Könnyen ellenőrizhető, hogy  $U$  nem 4-szomszédja  $V$ -nek.

Nyilvánvalóan, ha  $U$  8-szomszédja (4-szomszédja)  $V$ -nek, akkor  $V$  is 8-szomszédja (4-szomszédja)  $U$ -nak.

Példaként keressünk egy olyan 8-utat amelyik a  $(2, 1)$  koordinátájú pontot a  $(4, 3)$  koordinátájú ponttal köti össze. Az egyik lehetséges megoldás a  $(2, 1), (3, 1), (4, 2), (4, 3)$  pontsorozat. Azonban esetünkben 4-út nem létezik. Vegyük észre, hogy tetszőleges digitális halmaz két pontja esetén, ha létezik az egyikből a másikba tartó 8-út (4-út), akkor a másiktól az egyikbe tartó is létezik. A példánkban a  $(4, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 1)$  pontsorozat a  $(4, 3)$  koordinátájú pontot a  $(2, 1)$  ponttal összekötő 8-út.

**1.6. Definíció.** Legyen  $D$  egy digitális halmaz,  $X$  és  $Y$  ennek pontjai. Az  $X$  pontot **8-irányban (4-irányban) összefüggőnek** nevezzük  $Y$ -nal, ha létezik egy az  $X$ -et az  $Y$ -nal összekötő 8-út (4-út).

A korábbi példa alapján a  $(2, 1)$  koordinátájú pont 8-irányban összefüggő a  $(4, 3)$  koordinátájú ponttal. Azonban 4-irányban nem összefüggő. Fontos megjegyezni, hogy ha  $X$  és  $Y$  valamely digitális halmaz pontjai, és  $X$  4-irányban összefüggő  $Y$ -nal, akkor 8-irányban is.

**1.7. Definíció.** Legyen  $X$  a  $D$  digitális halmaz pontja. Az  $X$  **8-komponensét** a következőképpen definiáljuk:

$$K_D^8(X) = \{Y | Y \in D \text{ és } Y \text{ 8-összefüggő az } X \text{ ponttal}\}.$$

**1.8. Definíció.** Legyen  $X$  a  $D$  digitális halmaz pontja. Az  $X$  **4-komponensét** a következőképpen definiáljuk:

$$K_D^4(X) = \{Y | Y \in D \text{ és } Y \text{ 4-összefüggő az } X \text{ ponttal}\}.$$

**1.9. Definíció.** Konstruáljuk meg egy  $D$  digitális halmaz minden  $X$  pontjához a  $K_D^8(X)$  ( $K_D^4(X)$ ) halmazt. Ezen halmazok közül a páronként diszjunktakat a  $D$  **8-komponenseinek** (**4-komponenseinek**) nevezzük.

**1.10. Definíció.** A  $D$  digitális halmazt **8-összefüggőnek** (**4-összefüggőnek**) nevezzük, ha minden  $P$  pontja esetén  $K_D^8(P) = D$  ( $K_D^4(P) = D$ ) teljesül.

Visszatérve a korábbi példánkhoz és annak jelöléseire a következő megállapításokat tehetjük:  $K_D^8(P(2, 1)) = K_D^8(P(4, 3)) = F$ ,  $K_D^4(P(2, 1)) = U$  és  $K_D^4(P(4, 3)) = V$ . Ezek alapján a  $D$  egyetlen 8-komponensből áll, és így 8-összefüggő. Azonban nem 4-összefüggő, mert két 4-komponense van, nevezetesen  $U$  és  $V$ .

**1.11. Definíció.** Egy  $D$  digitális halmazt **ablaknak** nevezünk, ha létezik  $A(k, l)$  és  $B(m, n)$  pontja, úgy, hogy a  $D$  előáll a következő alakban:

$$D = \{X(i, j) | i = k, k + 1, \dots, m; j = l, l + 1, \dots, n\}.$$

Az  $A$  pontot az ablak **balfelső**, a  $B$  pontot az ablak **jobbalsó sarkának** nevezzük. Az **ablak keretén** az  $L = \{X(i, j) | i = k + p, j = l + q\}$  halmazt értjük, ahol  $p \in \{0, m - k\}$  és  $q \in \{0, n - l\}$ .

**1.12. Definíció.** Egy  $D$  digitális halmaz által **kifeszített ablak** alatt a  $D$ -t tartalmazó legszűkebb ablakot értjük.

**1.13. Definíció.** Legyen  $f$  a  $D$  digitális halmaz felett értelmezett bináris kép. Jelölje  $B$  az  $f$  háttérét és  $F$  az előterét. **Lyukaknak** nevezzük a  $B$  azon 4-komponenseit (8-komponenseit), amelyekhez nem lehet konstruálni olyan 4-utat (8-utat), amely a komponens



egy tetszőleges elemét a  $D$  által kifizített  $W$  ablak keretének valamely pontjával köti össze, úgy, hogy az utat alkotó pontok mindegyike a  $W \setminus F$  halmaz eleme.

Most nézzünk egy-két szemléltető példát az új fogalmakra a korábbi példánk segítségével. Sem az  $U$  sem a  $V$  nem ablak. Ha például az  $U$  halmazból a  $(3, 1)$  koordinátájú pontokat elhagyjuk, akkor egy ablakot kapunk. A  $V$  halmaz által kifizített ablak a  $V \cup \{(3, 2)\}$  halmaz lesz. A példában szereplő  $D$  digitális halmaz nem tartalmaz lyukat (függetlenül attól, hogy melyik összefüggőséget választjuk).

## 2. Heurisztikus algoritmusok

Kezdetben — hasonlóképpen a digitális képfeldolgozás más algoritmusaihoz — a vázkijelölő algoritmusok is heurisztikusak voltak. Ebben a fejezetben két ilyen algoritmust ismertetünk vázlatosan. Megfigyelhetjük ezen próbálkozások gyengeségeit is.

A [28]-ban S.K. Parui és A. Datta által publikált algoritmus ötlete egy egyszerű folytonos modellből származik. Ennek alapján a vázat a folytonos esetben a következőképpen definiálhatjuk:

**2.1. Definíció** [28]. Azon  $P$  objektumpontokat **vázpontoknak** fogjuk nevezni, amelyek a rajtuk áthaladó legrövidebb hosszúságú húrok közül legalább egynek felezőpontja. A vázpontok összeségét az objektum **vázának** nevezzük.

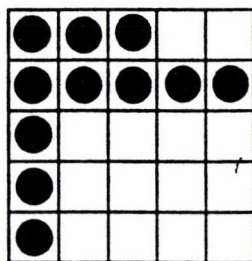
Digitális képen — a fenti ötletet felhasználva — a vázat a függőleges és vízszintes irányú húrok vizsgálatával jelölhetjük ki. Ezeket lefutásoknak fogjuk nevezni. Megállapodunk abban, hogy a függőleges lefutás kezdőpixele a legfelső objektumpont, a vízszintes pedig a legbaloldaltibb. Egy lefutás hosszán az azt alkotó objektumpontok számát értjük. Egy  $n$  hosszúságú lefutás közép-pixelén a lefutás kezdetétől számított  $\lceil (n+1)/2 \rceil$  objektumpontot értjük. Ez a fogalom a folytonos modellben a felezőpontnak felelt meg.

Az objektum váza a következőképpen található meg: minden objektumpont esetén megvizsgáljuk az ahhoz tartozó lefutásokat. E két lefutás közül a rövidebbet választjuk ki. Ha a vizsgált objektumpont közép-pixele ennek a minimális lefutásnak, akkor vázpontnak nevezzük. A vázpontok összesége alkotja a vázat.

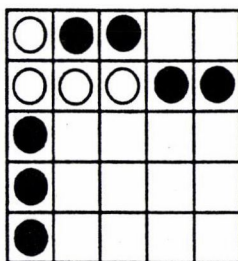
Világos, hogy egy vázpont megtalálása független más vázpontoktól, így a vázkijelölés párhuzamosítható. Nagyon egyszerű ábrák esetén is tapasztalhatjuk azt, hogy a váz nem őrzi meg az objektum összefüggőségi viszonyait. Példaként tekintsük a 2a. ábrán látható objektumot és annak vázát a 2b. ábrán.

Látható, hogy a vázkijelölés eredményeként (általában) csökken az objektumpontok száma. A vázpontok kivételével minden objektumpont háttérponttá válik. A példánkban a 2a. ábrán csak azok az objektumpontok maradnak az eljárás után is objektumpontok, amelyek a 2.1. definíció értelmében vázpontok. Az eredeti objektum 8-összefüggő (sőt 4-összefüggő) volt, de a váz nem 8-összefüggő. Ez nagy probléma, mert csak a vázat ismerve nem tudjuk eldönteni a feldolgozás későbbi szakaszában, hogy ez egy vagy két objektumnak a váza. Fontos, hogy a váz megőrizze az eredeti objektum összefüggőségi viszonyait. Ennél a példánál ez nem teljesült.

A [7]-ben egy speciális célokra kifejlesztett heurisztikus algoritmust találhatunk. Arra való tekintettel, hogy ez csak kéziratban jelent meg, ezért részletesebben ismertetjük.



2a. ábra



2b. ábra

Jelölje  $f$  az  $A(k, l)$  balfelső és  $B(m, n)$  jobbsó sarkú  $W$  ablak felett értelmezett bináris képet. Ezt a digitális képet könnyen reprezentálhatjuk egy  $m - k$  oszlopból és  $n - l$  sorból álló bináris mátrixszal. A kapcsolatot az  $f$  és  $M$  között a következő egyenlőség teremti meg:

$$M_{x,y} = f(P(x, y)) \quad \forall P \in W.$$

A vázpontok kijelölése az  $M$  mátrix soraiban történik a sorok indexének növekvő sorrendjében haladva. Tételezzük fel, hogy az  $y_0$ -nál ( $y_0 > l$ ) kisebb indexű sorokban a vázpontokat már kijelöltük. Képezzük az  $y_0$ , illetve az  $y_0 - 1$  sor megfelelő elemeinek felhasználásával az

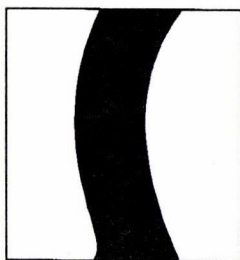
$$E_x^{y_0} = 2(1 - m_{y_0, x}) + (1 - m_{y_0-1, x})$$

összegeket. Ekkor  $E_x^{y_0}$  lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3. Ha  $E_x^{y_0} = \lambda$ , akkor azt mondjuk, hogy az  $E_x^{y_0}$  sorozat a  $j$ -edik pontban az  $A_\lambda$  ( $\lambda = 0, 1, 2, 3$ ) állapotban van. Most lássunk egy példát az  $E_x^{y_0}$  sorozat képzésére. A 3. ábrán egy bináris képet látunk, ezt követően egy táblázatot, amelyik a képet reprezentáló bináris mátrixot, és ennek segítségével a fenti sorozat képzését mutatja be.

$y_0$	●	●	●	○	○	●	●	●	○
$y_0-1$	●	●	○	○	●	●	●	●	○

3. ábra

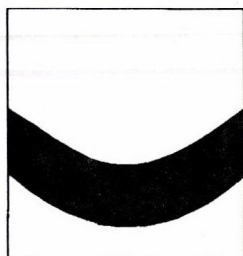
$y_0 - 1$	11	1	0	0	111	0
$y_0$	11	0	0	1	111	0
$E_x^{y_0}$	00	2	3	1	000	3
állapot	$A_0$	$A_2$	$A_3$	$A_1$	$A_0$	$A_3$



4. ábra

Az  $A_\lambda$  értékek felhasználásával a képet alkotó foltvonalakat két nagy csoportba oszthatjuk. Az egyik csoportot a "nem visszahajló foltvonalak" alkotják. Erre jellegzetes példa a 4. ábrán látható foltvonal. Az ezeknek megfelelő állapotsorozatra az jellemző, hogy egyetlen  $A_0$  sorozatot tartalmaz, amelynek hossza a foltvonal vastagságával becsülhető.

A másik csoportot a "visszahajló foltvonalak" alkotják. Erre példát az 5. ábrán láthatunk. Az ezeknek megfelelő állapotsorozatban legalább két darab  $A_0$  sorozat van. Az  $A_0$  sorozatokat elválasztó  $A_1$  vagy  $A_2$  szelet hossza jellemző a foltvonal görbületére.



5. ábra

A 3. ábrán látható képről kis mérete miatt nem tudjuk eldönteni, hogy melyik csoportba tartozó foltvonal részletét ábrázolja.

Ezek után az  $y_0$  sorban szereplő  $A_0$  sorozatok — mint vízszintes lefutások — közép-pixelét (figyelembe véve a korábban kijelölt vázpontok elhelyezkedését) kijelöljük vázpont-nak. Elágazások, kereszteződések esetén a vízszintes lefutások mellett a függőleges lefutások vizsgálatára is szükség van. Erről részletesebben olvashatunk az említett dolgozatban.

### 3. Vékonyító algoritmusok

A vázkijelölésre használt egyik alapvető technika a vékonyítás. Ennek pontos definícióját a 6. fejezetben fogjuk ismertetni. Az irodalomban a vázkijelölést és a vékonyítást

sokszor rokon értelemben használják. Pedig lényeges különbség van a kettő között. A vázkijelölés egy olyan algoritmus, amelyik egy objektum vázát szolgáltatja eredményként. A vékonyítás pedig egy olyan iteratív módszer, amely minden iterációban törli a vizsgált objektum azon objektumpontjait, amelynek szomszédságában van háttérpont. (Az ilyen objektumpontot kontúrpontnak nevezik.) Bizonyos járulékos feltételekkel elérhetjük azt is, hogy csak abban az esetben történjen meg egy kontúrpontnak a törlése, ha az nem változtatja meg az objektum összefüggőségi viszonyait.

Régebben a vázat többféleképpen definiálták. Néhányat ezek közül mi is ismertetünk ebben a munkában. Gyakran a vékonyítás során kapott objektumot definiálták az eredeti objektum vázaként. Napjainkban a váz általánosan elfogadott definíciója (lásd 7. fejezet) független a kinyeréséhez használt módszertől. Ezért a vékonyító algoritmusok megkonstruálása után még igazolni kell, hogy a kimenetként kapott kép valóban a bemeneti képen látható objektum vázát tartalmazza. A 7. fejezetben példaként ismertetünk egy ilyen komplex elemzést.

A vékonyító algoritmusok családjára klasszikus példa E.S. Deutsch [14]-ben ismertetett algoritmus. Itt a szerző egy Boole-egyenletrendszer segítségével adja meg azokat a feltételeket, amelyek meghatározzák, hogy egy objektumpont mikor törölhető.

**3.1. JELÖLÉS.** Legyen  $f$  a  $D$  digitális halmaz felett értelmezett digitális kép. Legyen  $P(x, y)$  a  $D$  egy tetszőleges pontja. Ekkor a  $P_1(x+1, y), P_2(x+1, y+1), P_3(x, y+1), P_4(x-1, y+1), P_5(x-1, y), P_6(x-1, y-1), P_7(x, y-1), P_8(x+1, y-1)$  jelölésekkel defináljuk a  $\gamma_P(i) = f(P_i)$  függvényt. A  $\gamma_P$  helyett, ha nem okoz félreértést a  $\gamma$  jelölést fogjuk használni.

**3.2. Definíció.** A  $\Gamma$  kereszttszámot (Hilditch-féle keresztteződési szám) a következőképpen definiáljuk:

$$\Gamma = \sum_{k=1}^8 |\gamma((k \bmod 8) + 1) - \gamma(k)|.$$

Most röviden ismertetjük a Deutsch-féle szabályrendszert és az azt használó algoritmust.

$$(3.1) \quad \Gamma = 0, 2 \text{ vagy } 4$$

$$(3.2) \quad \sum_{k=1}^8 \gamma(k) \neq 1$$

$$(3.3) \quad \gamma(1) \wedge \gamma(3) \wedge \gamma(5) = 0$$

$$(3.4) \quad \gamma(1) \wedge \gamma(3) \wedge \gamma(7) = 0$$

Ha  $\Gamma = 4$ , akkor még vagy az (3.5a) vagy az (3.5b) feltételnek is teljesülnie kell:

$$\begin{aligned}
 & \{\gamma(1) \wedge \gamma(7) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 & \{\gamma(2) \vee \gamma(6) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 (3.5a) \quad & \{\gamma(3) \vee \gamma(4) \vee \gamma(5) \vee \gamma(8) = 0\} \\
 & \{\gamma(1) \wedge \gamma(3) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 & \{\gamma(4) \vee \gamma(8) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 (3.5b) \quad & \{\gamma(2) \vee \gamma(5) \vee \gamma(6) \vee \gamma(7) = 0\} \\
 (3.6) \quad & \gamma(3) \wedge \gamma(5) \wedge \gamma(7) = 0 \\
 (3.7) \quad & \gamma(5) \wedge \gamma(7) \wedge \gamma(1) = 0
 \end{aligned}$$

Ha a  $\Gamma = 4$ , akkor még vagy a (3.8a) vagy a (3.8b) feltételnek is teljesülnie kell:

$$\begin{aligned}
 & \{\gamma(5) \wedge \gamma(3) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 & \{\gamma(6) \vee \gamma(2) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 (3.8a) \quad & \{\gamma(1) \vee \gamma(4) \vee \gamma(7) \vee \gamma(8) = 0\} \\
 & \{\gamma(7) \wedge \gamma(5) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 & \{\gamma(8) \vee \gamma(4) = 1\} \\
 & \text{és} \\
 (3.8b) \quad & \{\gamma(5) \vee \gamma(6) \vee \gamma(7) \vee \gamma(2) = 0\}.
 \end{aligned}$$

Első lépésben megvizsgáljuk, hogy mely objektumpontok elégítik ki az (3.1)-(3.5) szabályok mindegyikét. Amelyek kielégítik azokat töröljük. (Törlés alatt egy objektumpontnak háttérponttá történő átminősítését értjük.) Ez lesz az első alciklus. A második alciklusban az (3.1),(3.2) és (3.6)-(3.8) szabályok teljesülését vizsgáljuk. A vizsgálat után a lehetséges törléseket is elvégezzük. A két alciklus egymásutáni egyszeri alkalmazása alkot egy ciklust. Ezt addig kell ismételni, amíg van törölhető objektumpont a képen.

Az irodalomban található vékonyító algoritmusok csoportosításának egyik lehetséges szempontja az, hogy hány alciklusból áll. Lehetséges értékek: 1 [22,23,33], 2 [12,29,34], 4 [1,17], 8 [1,17]. Csoportosíthatjuk az algoritmusokat a szekvenciális [9,21] vagy párhuzamos [28,32] voltuk alapján is.

Vegyük észre, hogy a vizsgált algoritmusban az adott alciklusbeli szabályok teljesülését az összes objektumpontra egyidejűleg vizsgálhatjuk meg. Ezért párhuzamos architektúrájú számítógép használatával jelentősen csökkenthetjük a végrehajtási időt.

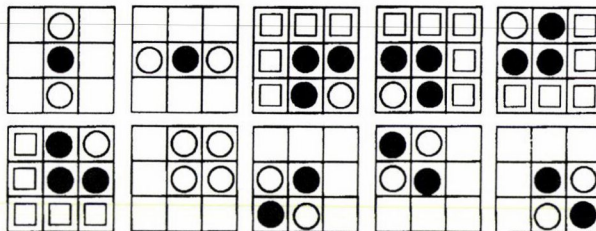
Most vizsgáljunk meg néhány szabályt közelebbről. A (3.2) szabálynak az a hatása, hogy ha az összeg értéke 1, akkor megakadályozza a már vékonyított komponensek végeinek törlését. A (3.3) és (3.4) a négyzetes ablakon belüli felső és jobboldali pozíciók 4-összefüggőségét biztosítja. A (3.6)-(3.8) szabályok a (3.3)-(3.5) szabályok 180°-os "elforgatottjai".

Az objektumpontok törlésére vonatkozó feltételeket nem csak Boole-egyenletekkel, hanem úgynevezett sablonok segítségével is megadhatjuk.

**3.3. Definíció.** Legyen  $X$  és  $Y$  digitális halmaz. Egy általánosított, bináris értékű  $Y$ -ből  $X$ -be ható  $t$  **sablon** alatt egy  $t : Y \rightarrow f(X)$  függvényt értünk, ahol  $f$  egy  $X$  feletti bináris kép. A  $t$  egy rögzített  $P \in Y$  esetén egy  $X$  feletti bináris kép, azaz  $t_P : X \rightarrow \{0, 1\}$ .

**3.4. Definíció.** A 3.3. Definíció jelöléseit használva. Minden sablon esetén lehetőség van egy  $P(k, l) \in Y$  elem kitüntetésére, amit **centrális elemnek** nevezünk. Azt mondjuk, hogy a  $t$  **sablon illeszkedik** a  $Q(m, n) \in X$  pontban a képre, ha  $\forall P'(i, j) \in Y$  esetén  $f(Q'(m - (k - i), n - (l - j))) = t_{P'(i, j)}(Q'(m - (k - i), n - (l - j)))$  teljesül.

Pavan Kumar és munkatársai [22], egy iteratív, párhuzamos vázkijelölő algoritmust adtak, amely egyetlen alciklust alkalmaz. Az általuk használatos sablonokat a 6. ábrán láthatjuk.



6. ábra

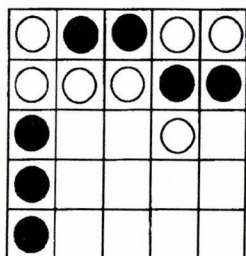
Ezt a tíz sablont A-típusú sablonnak nevezzük. Vizsgáljuk meg például az első sablont közelebbről. Nézzük meg a 3.4. definíció jelöléseit használva, hogy mit jelent egy ilyen grafikus sablon-megadás. Ahogy azt korábban láttuk ez meghatároz egy digitális halmazt, ez esetünkben az  $Y$ -nak felel meg. És meghatároz egy  $Y$  feletti  $g$  bináris képet is. Állapodjunk meg, hogy ez a megadási mód  $\forall P \in Y$  esetén jelentsen egy olyan  $X$  feletti  $f'$  bináris képet, amely a következőképpen van definiálva:

$$f'(P') = \begin{cases} g(Q') & , \text{ ha } Q' \text{ eleme az } Y\text{-nak} \\ 0 & , \text{ egyébként.} \end{cases}$$

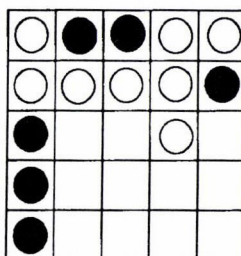


A  $\square$  jel által meghatározott pozíciók közül egy sablonon belül legalább egynek o-nek kell lennie. Ez tulajdonképpen több sablon együttes leírását teszi lehetővé. Például a harmadik sablon ezzel a rövidítési technikával 31 sablont helyettesít.

Ezek alapján könnyen eldönthetjük, hogy ez a sablon a 7a. ábrán látható bináris kép mely pozícióira illeszkedik.



7a. ábra



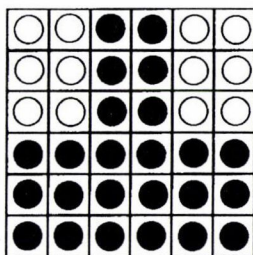
7b. ábra

Ezek után a sablonok használatát könnyű megérteni. Ez nem jelent mást, mint azoknak az objektumpontoknak a megkeresését és törlését, amelyekre legalább egy sablon illeszkedik. Ezt a típusú sablonozást törlő sablonozásnak nevezzük. Ha ilyen értelemben használjuk az első sablont, akkor az ezzel történő sablonozás eredménye a 7b. ábrán látható.

A fenti cikkben ismertetett algoritmus megőrző sablonozást használ, ami azt jelenti, hogy csak azokat az objektumpontokat töröljük, amelyekre egyetlen sablon sem illeszkedik. Tehát a sablonok nem a törlés, hanem a megőrzés feltételeit határozzák meg.

Vizsgáljuk tovább a [22]-ben található algoritmust. Ha csak az A-sablonokat használjuk, akkor a belső pontok is törölődhetnek. (Például a 8. ábrán látható objektum egyetlen ciklus alatt törölődik, mert egyetlen objektumpontjára sem illeszkedik A-sablon.) Ezért a szerző azt javasolja, hogy hozzunk létre egy úgynevezett sűrű képsíkot és tervezzünk meg egy újabb csoport sablont, amit ezen fogunk használni. Egy sablon illeszkedése a sűrű képsíkon azt jelenti, hogy az objektumpont nem törölhető az A-sablonokkal. Ezekről részletesebben a fenti irodalomban olvashatunk. A sűrű képsík az eredeti digitális képből nyerhető a következőképpen. Abban az esetben, ha az eredeti digitális kép  $2 \times 2$ -es környezetében csak objektumpontok vannak, akkor a megfelelő sűrű képsíkbeli pont is objektumpont lesz. Minden más esetben a sűrű képsíkbeli pont háttérpont lesz. Nagyon költséges lenne, ha az egész sűrű képsíkot tárolnánk, különösen, ha az eredeti kép nagyon nagy. Erre azonban nincs szükség. A sűrű képsík pontjait helyileg lehet létrehozni, és azonnal elvégezni a sablonozást rajta a helyreállító sablonokkal.

A sablonok használata torzításokat okoz a képen. Ezen hatások csökkentésére különböző javaslatok találhatók az irodalomban. Az egyik lehetőség speciális, úgynevezett tisztító sablonok használata [28], amelyek a hibákat korrigálják. A másik eljárás az adaptív sablonozás, amelyről részletesen a [33]-ban olvashatunk. Ezt most röviden áttekintjük.

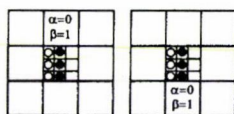


8. ábra

Az alapelv tulajdonképpen nagyon egyszerű. Bizonyos feltételek teljesülése esetén a  $3 \times 3$ -as sablonok helyett  $9 \times 9$ -eseket használunk. (Ha állandóan ilyen sablonokat használnánk, az túl „drága” lenne végrehajtási idő és tárhely szempontjából egyaránt.) A nagyméretű sablonok valójában nem  $9 \times 9$ -esek. A középső rész egy szokásos  $3 \times 3$ -as sablon. A nyolc darab perifériális rész mindegyike szintén lefed egy-egy  $3 \times 3$ -as területet, de csökkentett információszolgáltatással (9. ábra). Ezen részekben két bináris érték generálódik. Legyen ez a két érték  $\alpha$  és  $\beta$ .

$$\alpha = \begin{cases} 0 & , \text{ ha a } \sum_{k=1}^8 \gamma(k) \leq 5 \\ 1 & , \text{ különben.} \end{cases}$$

(A vizsgált elem minden esetben a megfelelő perifériális elem centrális eleme.) A  $\beta$  bináris változót ezen  $3 \times 3$ -as területen elhelyezkedő pontok által kiadott minta feljegyzésére használjuk. Például a tapasztalatok alapján az egy egyenesre eső három pont által alkotott mintát érdemes megkülönböztetni az egyéb elrendezéstől. Az ilyen kitüntetett elrendezés esetén  $\beta = 1$ , különben  $\beta = 0$ .



9. ábra

A feltétel ebben az esetben, ami alapján a  $3 \times 3$ -as sablonról a  $9 \times 9$ -es sablonra térünk át, az, hogy a kontúrponthoz alatta és felette van két előtérpont. Ez azt valószínűsítheti, hogy egy hosszú függőleges vonal található a képen.

Más-más „torzítás” esetén más-más feltételt és más-más  $9 \times 9$ -es sablont kell alkalmaznunk. Ennek a módosításnak az az előnye, hogy kevés „nagy” sablonra van szükség, és nagyon ritkán kell áttérni ezekre. Ezzel végrehajtási időt és memóriát takaríthatunk meg ahhoz képest, ha  $9 \times 9$ -es sablont használnánk állandóan.



#### 4. Valószínűségsszámítási módszerek alkalmazása

Az iteratív módszerek jelentős csoportja valószínűségsszámítási eszközökön alapul. Ezek közül kettőt szeretnénk kiemelni ezen dolgozatban. Elsőként Sabri A. Mahmoud és munkatársainak [25]-ben publikált vázkijelő algoritmusát ismertetjük.

A szerzők egy  $X$  halmaz fuzzy  $c$ -felosztását a következőképpen definiálják:

**4.1. Definíció.** Egy  $X$  halmaz egy fuzzy  $c$ -felosztása olyan  $c$  darab függvényt tartalmazó rendszer, amely teljesíti a következő tulajdonságokat:

$$u_i : X \rightarrow [0, 1], \text{ ahol } 0 \leq i \leq c-1 \text{ és } i \in \mathcal{N},$$

$$\sum_{i=0}^{c-1} u_i(x) = 1 \quad \forall x \in X.$$

Az  $u_i$ -t **fuzzy halmaznak**, illetve **fuzzy klaszternek** nevezzük  $X$ -ben. Az  $u_i(x)$  az  $x$  tartalmazási foka az  $u_i$  fuzzy halmazon.

Ez az algoritmus egyenes szakaszokból építi fel az objektum vázát. Ez két lépésben történik meg. Az első lépésben a szakaszok végpontjait határozza meg, a második lépésben pedig ezek segítségével hozza létre a vázat. A szakaszok végpontjait a következő algoritmus segítségével határozhatjuk meg:

Legyen  $c$  egy olyan rögzített konstans, amely kettőnél nem kisebb és nem nagyobb az  $X$  elemszámnál. Vegyük az  $X$  digitális halmaznak egy fuzzy  $c$ -felosztását, amelyben található  $u_i$  függvények egyike sem azonosan nulla.

Számítsuk ki az  $m_i$  értékeket, amelyek a klaszterek centrumai lesznek az algoritmus végrehajtása után:

$$m_i = \frac{\sum_{x \in X} (u_i(x))^2 x}{\sum_{x \in X} (u_i(x))^2} \quad i = 0, 1, \dots, c-1$$

Ezek után konstruáljunk egy új fuzzy  $c$ -felosztást a következők szerint:

Legyen  $I(x) = \{i | m_i = x, 0 \leq i \leq c-1\}$ . Ha  $I(x)$  nemüres, akkor legyen

$$\hat{u}_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{ha } i = \hat{i} \\ 0, & \text{ha } i \neq \hat{i}, \end{cases}$$

ahol  $\hat{i}$  a legkisebb egész  $I(x)$ -ben. Ha  $I(x) = \emptyset$ , akkor

$$\hat{u}_i(x) = \frac{1/(\|x - m_i\|^2)}{\sum_{j=0}^{c-1} (1/(\|x - m_j\|^2))}.$$

Az euklideszi normát alkalmazva határozzuk meg az  $u_i$  és  $\hat{u}_i$  közti eltérést. Ha ez kisebb, mint egy megadott küszöb, akkor fejezzük be az algoritmus végrehajtását, egyébként legyen  $u_i = \hat{u}_i$  és lépünk vissza az  $m_i$ -k kiszámításáig és folytassuk onnan a végrehajtást.

A fenti algoritmus kiszámolja a klaszterek centrumát. Ezek után a képet letapogatjuk egy  $2 \times 2$ -es méretű ablakkal. Ha az ablak valamelyik két pontja különböző klaszterhez tartozik, akkor ezeket a klasztereket szomszédosoknak tekintjük. A szomszédsági relációk leírására egy  $c \times c$ -s mátrixot alkalmazhatunk. Két szomszédos klaszter centrumát egy egyenes szakasszal kötjük össze, amelynek végpontjai a vizsgált klaszterek centrumai. Az így kapott kép a váz.

Olyan végpontok elhagyhatók adatcsökkentő lépésként, ahol „majdnem folytonosság” van. Legyen  $v_i$  egy végpont, amely össze van kötve  $v_j$  és  $v_k$  végpontokkal. Jelölje  $\alpha$  a közbezárt szöget. Ha  $180^\circ - \gamma \leq \alpha \leq 180^\circ + \gamma$ , ahol  $\gamma$  egy küszöbszög, akkor  $v_i$ -t töröljük a vázból feltéve, ha az nincs más csúccsal is összekötve a fentieken kívül. A törlés után a  $v_j$  és  $v_k$  végpontokat össze kell kötni. Az eljárást addig ismételjük, amíg nincs több elhagyható csúcs.

Az S.S. You és W.H. Tsai algoritmus [26] többszintű képek esetén is alkalmazható. Ez azért érdekes, mert általában a vázkijelölő algoritmusok bináris képet várnak bemenetként. Az algoritmus ismertetése előtt néhány fontos fogalmat definiálunk.

**4.1. Definíció.** Egy **objektumpontot egyszerűnek** nevezünk, ha törlése nem változtatja meg az objektum összefüggőségi viszonyait, ellenben **összekötőpontnak**.

**4.2. Definíció.** Egy objektumpontot **végpontnak** nevezünk, ha pontosan egy objektumpont van 8-szomszédai között.

**4.3. Definíció.** Egy objektumpontot **izolált pontnak** nevezünk, ha nincs objektumpont a 8-szomszédai között.

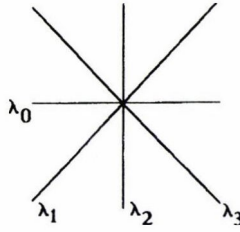
**4.4. Definíció.** Egy objektumpontot **belső pontnak** nevezünk, ha nincs háttérpont a 8-szomszédai között.

Tételezzük fel, hogy a digitális kép többszintű és a háttérpontok világosságkódja kisebb, mint az objektumpontok világosságkódja. Az eljárás során a képpontokat öt osztályba soroljuk. Az öt osztály közül négy váz-osztály és egy nemváz-osztály. A váz-osztályok tulajdonképpen a  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$  irányhoz tartozó egyenesek osztályát jelentik. Ezzel feltételezzük, hogy minden egyes vázpont a vázban illeszkedni fog legalább egy egyenesre a fentiek közül (10. ábra). Ebben az algoritmusban is csak négy irány van megadva. Ha szükséges, akkor több is megadható. Az öt osztályt  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_4$ -el jelöljük. A  $\lambda_4$  jelöli a nemváz-osztályt. Jelölje  $P_{x,y}(\lambda_i)$  annak a valószínűségét, hogy az  $(x, y)$  koordinátájú pont a  $\lambda_i$  osztályba tartozik. Az  $(x, y)$  koordinátájú pont  $S_{x,y} = \sum_{i=0}^3 P_{x,y}(\lambda_i)$  valószínűséggel tartozik a vázhoz.

A módszer során *a priori* ismeretként feltesszük, hogy általában egy vastag vonal  $P$  kontúrponyjának világosságkódja nagyobb, mint egy vonal belsejében lévő  $Q$  ponté, és a  $P$  pont kisebb valószínűséggel tartozik a vázhoz, mint a  $Q$ . Így az  $(x, y)$  koordinátájú pont kezdetben a következőképpen definiált valószínűséggel fog a vázhoz tartozni:

$$S_{x,y}^{(0)} = \frac{G_{x,y}}{G_{max}} \alpha_1,$$

ahol  $G_{max}$  a legnagyobb lehetséges világosságkód,  $G_{x,y}$  az  $(x, y)$  koordinátájú pont világosságkódja és  $0 < \alpha_1 < 1, \alpha_1 \in \mathcal{R}$ . Az  $\alpha_1$  egy alkalmas megválasztott konstans,



10. ábra

amelyik a kezdeti valószínűségi értékek kiigazítására szolgál. Az  $(x, y)$  koordinátájú pont kezdetben a következőképpen definiált valószínűséggel tartozik a háttérhez:

$$P_{x,y}^{(0)}(\lambda_4) = 1 - S_{x,y}^{(0)}.$$

Hogy külön-külön, osztályonként megbecsülhessük az  $(x, y)$  koordinátájú pont vázhoz tartozásának kezdeti valószínűségét, fel fogjuk használni  $5 \times 5$ -ös környezetében található képpontok valószínűségi értékeit. Legyen  $d_k(x, y)$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) a következőképpen definiálva:

$$d_0(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 |S_{x,y}^{(0)} - S_{x+i,y}^{(0)}|$$

$$d_1(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 |S_{x,y}^{(0)} - S_{x+i,y+i}^{(0)}|$$

$$d_2(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 |S_{x,y}^{(0)} - S_{x,y+i}^{(0)}|$$

$$d_3(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 |S_{x,y}^{(0)} - S_{x-i,y+i}^{(0)}|.$$

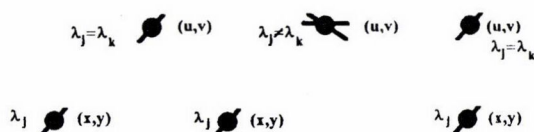
Ezek segítségével a  $P_{x,y}^{(0)}(\lambda_k)$  ( $k = 0, 1, 2, 3$ ) a következőképpen definiálható:

$$P_{x,y}^{(0)}(\lambda_k) = \frac{\alpha_1 - d_k(x, y)}{\sum_{i=0}^3 (\alpha_1 - d_i(x, y))} S_{x,y}^{(0)}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Amikor arról döntünk, hogy egy adott pont megőrizendő-e vázpontként, csak a vizsgált pont és az  $5 \times 5$ -ös környezetében található pontok közötti kölcsönhatást vesszük figyelembe. Általában egy  $\lambda_j$  irányú egyenes szakasz létezését az  $(x, y)$  koordinátájú pontban alátámasztja

egy  $\lambda_k$  irányú egyenes szakasz létezése az  $(u, v)$  koordinátájú pontban, ha az  $(u, v)$  az  $(x, y)$ -től  $j \cdot 45^\circ$  irányba esik és  $\lambda_k = \lambda_j$  (11. ábra). A fenti elgondolások alapján definiáljuk az alábbi kompatibilitási együtthatókat.

$$C((x, y), j, (u, v), k) = \begin{cases} 1, & \text{ha az } (u, v) \text{ az } (x, y) \text{ } j \cdot 45^\circ\text{-os szomszédja és } k = j \\ \alpha_2, & \text{ha az } (u, v) \text{ az } (x, y) \text{ } j \cdot 45^\circ\text{-os szomszédja és } k \neq j \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$



11. ábra

Az eljárás során minden egyes iterációban minden pont valószínűségét ki kell igazítani. Ahhoz, hogy ezt megtehesük ki kell számolni szomszédainak összhatását. Ha az  $(x, y)$  koordinátájú pont egyszerű és nem végpont, akkor végül törölni fogjuk. Ezért kívánatos növelni a háttérhez tartozásának valószínűségét. Ha az  $(x, y)$  vég-, izolált vagy összekötő pont, akkor vázpont, így kisebb valószínűséggel tartozik a háttérhez. Ha  $(x, y)$  koordinátájú pont belső pont, akkor nem tudjuk, hogy vázpont lesz-e vagy sem, és így annak a valószínűségét, hogy a háttérhez tartozik nem változtatjuk meg. A fenti megfontolások alapján annak a valószínűségét, hogy az  $(x, y)$  koordinátájú pont az  $r$ -edik iterációban a háttérhez tartozik, a következőképpen definiált együtthatóval változtatjuk meg:

$$Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_4) = \begin{cases} \beta_1 & , \text{ ha } (x, y) \text{ egyszerű, nem vég pont} \\ 0 & , \text{ ha belső pont} \\ \beta_2 & , \text{ egyébként,} \end{cases}$$

ahol  $\beta_1 > 0 > \beta_2$ . A  $\lambda_0$ -osztályba tartozó pontok valószínűségének változását a következőképpen definiáljuk:

$$Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_0) = \beta_3 \sum_{i=1}^4 \sum_{k=0}^3 \left[ P_{x+i,y}^{(r)}(\lambda_0) \cdot C((x, y), 1, (x+i, y), k) \cdot M_i \cdot N_i \right. \\ \left. + P_{x-i,y}^{(r)}(\lambda_0) \cdot C((x, y), 1, (x-i, y), k) \cdot m_i \cdot n_i \right],$$

ahol

$$\begin{aligned}
 M_i &= \begin{cases} \gamma, & \text{ha } (x+i, y) \text{ vázpont} \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases} \\
 m_i &= \begin{cases} \gamma, & \text{ha } (x-i, y) \text{ vázpont} \\ 1, & \text{egyébként} \end{cases} \\
 N_0 &= 1 \\
 N_i &= \begin{cases} 1, & \text{ha } N_{i-1} = 1 \text{ és } (x+i, y) \text{ nem háttérpont} \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \\
 n_0 &= 1 \\
 n_i &= \begin{cases} 1, & \text{ha } n_{i-1} = 1 \text{ és } (x-i, y) \text{ nem háttérpont} \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Az  $M_i$  és  $m_i$  értékeit arra használjuk, hogy növeljük azon pontok hatását, amelyek már vázpontnak bizonyultak. Az  $N_i$  és  $n_i$  letiltja azon pontok hatását, amelyek nincsenek közvetlen kapcsolatban az  $(x, y)$  koordinátájú ponttal. A  $Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_1)$ ,  $Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_2)$  és  $Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_3)$  hasonlóképpen definiálható. Ezek után:

$$P_{x,y}^{(r+1)}(\lambda_k) = \frac{P_{x,y}^{(r)}(\lambda_k)(1 + Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_k))}{\sum_{h=0}^4 P_{x,y}^{(r)}(\lambda_h)(1 + Q_{x,y}^{(r)}(\lambda_h))}.$$

Megmutatható, hogy az iteráció konvergens, ha  $\beta_3$  és a  $\gamma \geq 1$  az egyes iterációk során egyre kisebb értékeket vesznek fel. Az iterációs folyamat konvergenciájának apró anomáliáit különbözőképpen korrigálhatjuk. Erre a szerzők a [26]-ban különböző módszereket ajánlanak.

## 5. A kontúranalízis módszere

A vázkijelölő algoritmus konstruálása során használhatunk differenciálgeometriai eszközökön alapuló modellt is. Erre igen szép példa S. Riazanoff és szerzőtársainak munkája, amelyről részletesebben a [27]-ben olvashatunk.

A folytonos modell a következő: Legyen  $E$  egy objektum és  $C$  a kontúrja. A továbbiakban feltesszük, hogy a  $C$  a következő alakban áll elő:

$$C : \left( P(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \middle| t \in [0, T] \right),$$

ahol  $T$  egy rögzített konstans. A  $C$  görbe legyen minden pontjában kétszer differenciálható. A görbe  $\kappa(t)$  görbülete a  $P(t)$  pontban:

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))^{3/2}}.$$

5.1. *Definíció [27].* Az  $E$  objektum  $\epsilon$  sugarú **körlemez**zel való **erózióján** — a továbbiakban  $E_\epsilon$ -nal fogjuk jelölni — az  $E$  azon pontjainak halmazát fogjuk érteni, amelyek  $C$  kontúrtól való távolsága nagyobb, vagy egyenlő mint  $\epsilon$ .

A  $C_\epsilon$  jelölje az  $E_\epsilon$  kontúrját. A  $C_\epsilon$ -t a  $P(t)$  ismeretében a következőképpen határozhatjuk meg:

$$C_\epsilon : \left( P_\epsilon(t) = \begin{pmatrix} x_\epsilon(t) = x(t) - \epsilon \frac{y'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \\ y_\epsilon(t) = y(t) - \epsilon \frac{x'(t)}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}} \end{pmatrix} \middle| t \in [0, T] \right).$$

5.2. *Definíció [27].* A  $P_\epsilon(t)$  pontot **vázpontnak** nevezzük, ha eleme az  $E_\epsilon$  erózióknak és teljesül az alábbi feltételek valamelyike:

- A  $P_\epsilon(t)$  pontban lokális maximuma van  $P_\epsilon$  görbületnek.
- Az  $x_\epsilon(t)$  és  $y_\epsilon(t)$  deriváltja nulla a  $P_\epsilon(t)$ -ben.
- A  $C_\epsilon$  görbe a  $P_\epsilon(t)$  pontban metszi önmagát.

### 5.3. ALGORITMUS [27].

1.  $\epsilon \leftarrow 0$
2.  $\text{váz} \leftarrow \emptyset$
3. Repeat
  - 3.1. A  $C_\epsilon$  meghatározása.
  - 3.2. A vázpontok megkeresése a 5.2. definíció alapján.
  - 3.3. A váz bővítése a 3.2. pontban megtalált vázpontokkal.
  - 3.4. Az  $\epsilon$  értékének növelése.
4. Until  $C_\epsilon \neq \emptyset$

A diszkrét esetben a görbület a vizsgált kontúrpont  $3 \times 3$ -as környezetének segítségével becsülhető. (Ez az algoritmus kis módosítással képes többszintű képen is a vázkijelölést elvégezni.)

## 6. Matematikai morfológia

A vékonyító algoritmusok fejlesztésével párhuzamosan fejlődött a matematikai morfológia, mint a képanálízis halmazelméleti megközelítése. Ezt Matheron és Serra [15] alkotta meg. Ebben a fejezetben Ben-Kwei Jang és Roland T. Chin [6]-ban publikált eredményeit ismertetjük kissé részletesebben. A következő jelöléseket fogjuk használni:

- Az  $X_B$  az  $X$  digitális halmaz  $B$  vektorral való eltoltja
- Az  $\check{X}$  az  $X$  digitális halmaz origóra vett tükrözése során keletkezett halmaz.

Egy morfológiai művelet egy  $X$  digitális halmazt egy másik digitális halmazba transzformál. A transzformációt egy  $T$  digitális halmaz fogja meghatározni, ezért ezt a halmazt gyakran szerkesztő mintának is nevezik.

**6.1. Definíció.** Legyen  $X$  és  $T$  digitális halmaz. Az  $X \oplus T$  **Minkowski-összeget** a következőképpen definiáljuk:

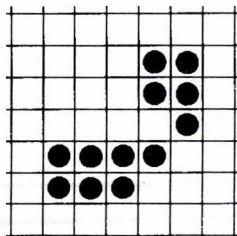
$$X \oplus T = \{A + B | A \in X, B \in T\} = \bigcup_{B \in T} X_B.$$

**6.2. Definíció.** Legyen  $X$  és  $T$  digitális halmaz. Az  $X \ominus T$  **Minkowski-különbséget** a következőképpen definiáljuk:

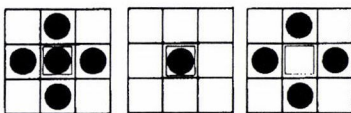
$$X \ominus T = \bigcap_{B \in T} X_B.$$

**6.3. Definíció.** Legyen  $X$  és  $T$  digitális halmaz. Az  $X$   $T$ -vel való **eróziója**  $X \ominus \tilde{T}$ .

**6.4. Definíció.** Legyen  $X$  és  $T$  digitális halmaz. Az  $X$   $T$ -vel való **dilatációja**  $X \oplus \tilde{T}$ .



12. ábra



13a. ábra

13b. ábra

13c. ábra

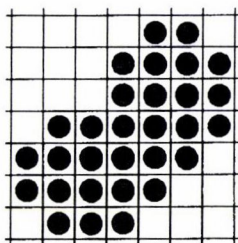
Tekintsük a 12. ábrán látható digitális halmazt. Legyen a  $T$  sablon a 13a. ábrán látható. A sablonon az egyik pontot megjelöltünk egy kerettel. Ez a centrális elem (a sablon középpontja), amelynek koordinátája mindig  $(0,0)$ . A 14. ábrán láthatjuk a  $T$  sablon hatását a 12. ábrán dilatáció és Minkowski-összeg esetén. Erózió és Minkowski-különbség esetén a végeredmény az üres halmaz lesz. Esetünkben a sablon középpontos szimmetriájának köszönhető, hogy a dilatáció és a Minkowski-összeg, illetve az erózió és a Minkowski-különbség esetén nincs különbség.



**6.5. Definíció.** Legyen  $X$  és  $T$  digitális halmaz. A  $T^1$  és  $T^2$  tetszőleges diszjunkt részhalmazai a  $T$ -nek, amelyek lefedik  $T$ -t. Az  $X$   $T$ -vel való **hit-miss transzformáltját** a következőképpen definiáljuk:

$$X \circledast T = (X \ominus T^1) \cap (X \oplus T^2).$$

A 12. ábrán található digitális halmaz hit-miss transzformáltja önmaga, ha a 13a. ábra  $T$  sablonát 13b. és 13c. ábrán látható módon felbontjuk  $T^1$  és  $T^2$ -re.



14. ábra

Nyilvánvalóan a  $T$  felbontása  $T^1$ -re és  $T^2$ -re nem egyértelmű. A továbbiakban a  $T$  felbontását egy adott sablon esetén a következőképpen fogjuk értelmezni. Az adott sablon lesz a  $T^1$ , a sablon komplementere pedig a  $T^2$  digitális halmaz.

**6.6. Definíció.** Legyen  $X$  és  $T$  digitális halmaz. Az  $X$   $T$ -vel való **vékonyítását** a következőképpen definiáljuk:

$$X \odot T = X \setminus (X \circledast T).$$

Ahhoz, hogy az  $X$ -et szimmetrikusan vékonyítsuk, általában több vékonyító sablon szükséges. Ekkor a vékonyítás a következő alakot ölti:

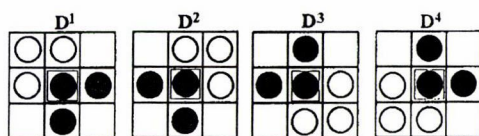
$$X \odot T = (\dots((X \odot T_1) \odot T_2) \dots) \odot T_n.$$

## 7. Egy vékonyító algoritmus elemzése a matematikai morfológia eszközeivel

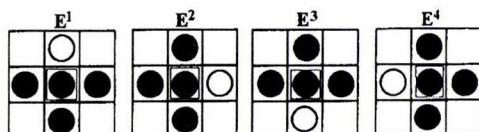
A [6]-ban Ben-Kwei Jung és R.T. Chin ismertet egy vékonyító algoritmust és annak komplex elemzését. Az elemzés eredményeit részletesebben ismertetjük, hogy szemléltessük ezzel az alapvető bizonyítási technikákat.

Először ismerkedjünk meg az algoritmussal. Ez két ciklusból áll. Az első ciklus egy iteratív párhuzamos eljárás, amely négy alciklusra bontható. Minden alciklusban egy  $3 \times 3$ -as szerkesztő sablont használunk, hogy egy adott irányból (ÉNY, ÉK, DK és DNY) a kontúrpontokat eltávolíthassuk. A négy szerkesztő sablon a 15. ábrán látható,





15. ábra



16. ábra

$D = \{D^1, D^2, D^3, D^4\}$ . A második ciklus egy iteratív eljárás, amely az  $\acute{E}, K, D$  és  $NY$  kontúrpointok eltávolítására szolgál. A négy szerkesztő sablon  $E = \{E^1, E^2, E^3, E^4\}$  a 16. ábrán látható.

Legyen  $S$  egy 8-összefüggő objektum. Az iterációs eljárás első és második ciklusát rendre  $m$ -mel és  $n$ -nel fogjuk indexelni. Az algoritmust teljes mértékben meghatározza a  $\Psi$  transzformáció, amely az első és a második ciklust jelenti. Az első ciklus a

$$\Psi\{S, D, m\} = \{S \odot D\}_m$$

ahol  $m$  az iterációk számát jelöli. Most fogadjuk el, hogy  $\Psi\{S, D, m\}$  konvergens és  $S'$ -höz konvergál. A második ciklust a

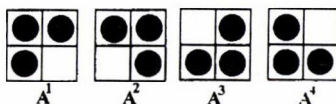
$$\Psi\{S', E, n\} = \{S' \odot E\}_n$$

összefüggés adja, és fogadjuk el azt, hogy  $\Psi\{S', E, n\}$  konvergens és konvergál  $I$ -hez.

**7.1. Definíció [6].** Legyen adott egy 8-összefüggő  $S$  objektum és  $S^w$  álljon 4-összefüggő komponensekből. Az  $S$  objektum **vázán** azt az  $I$  objektumot értjük, amelyik kielégíti a következő feltételeket:

- **Összefüggőség.** Az  $S$  és  $I$  homotópiája megegyezik. Két véges halmaz  $S$  és  $I$  homotóp, ha létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az  $S$  és  $I$  komponensei között, és létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az  $S$  és  $I$  lyukai között is.
- **Egy pixel vastagság.** Az  $I$  egy pixel vastagságú, azaz ha egy olyan pont fordul elő  $I$ -ben, amely a 17. ábrán látható  $2 \times 2$ -es négyzetes minták valamelyikéhez tartozik, akkor ez a pont egyszerű pont.
- **Középtengely.**  $I$  megfelel az  $S$  középtengelyének. Ennek a pontos definíciója a [6]-ban található.

A továbbiakban a cikk azon elméleti eredményeit ismertetjük, amelyek a fenti algoritmus elemzésére vonatkoznak.



17. ábra

7.2. TÉTEL [6]. Ha  $S$  nemüres digitális halmaz és a  $T$  sablon több, mint egy elemet tartalmaz, akkor  $S \odot T$  sem üres halmaz.

*Bizonyítás* [6]. Nyilvánvaló, hogy  $S \odot T$  véges. Ugyanis  $S$  véges és  $S \odot T = S \setminus (S \otimes T) \subseteq S$ . Tegyük fel, hogy  $S \odot T$  üres, azaz  $(S \otimes T) \supseteq S$ , ekkor pedig  $(S \ominus \tilde{T}) \supseteq S$ . Azonban az erózió definíciójából következik, hogy

$$S \ominus \tilde{T} = \bigcap_{B \in \tilde{T}} S_B = S \bigcap \left( \bigcap_{\substack{B \neq (0,0) \\ B \in \tilde{T}}} S_B \right).$$

Az azt jelenti, hogy  $S \ominus \tilde{T} \subset S$ , ez azonban ellentmondás. Tehát  $S \odot T$  nemüres.

7.3. Következmény [6]. Ha  $S$  nemüres digitális halmaz és  $T$  olyan szerkesztő sablonok véges sorozata, amelyek mindegyike tartalmazza az eredetit, és egynél több elemet tartalmaz, akkor  $\{S \odot T\}_k = \Psi(S, T, k)$  is nemüres digitális halmaz minden pozitív  $k$ -ra.

7.4. TÉTEL [6]. A 7.2. tétel feltételeit és jelöléseit használva  $S$  egy nemüres digitális halmazhoz konvergál véges iteráción belül.

*Bizonyítás* [6]. Tegyük fel, hogy nincs olyan  $k$  természetes szám, ami kielégíti a konvergencia feltételt, azaz

$$\Psi(S, T, k+1) = \Psi(S, T, k)$$

ahol  $\Psi$  a vékonyító transzformáció. Mivel a szerkesztő minták mindegyike kielégíti a 7.3. következmény feltételeit, ezért ezt és a következményt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\emptyset \subset \Psi(S, T, k+1) \subset \Psi(S, T, k) \subset \dots \subset \Psi(S, T, 1) \subseteq S$$

ami ellentmond annak a ténynek, hogy  $\{S \odot T\}_k$  nemüres egyetlen pozitív  $k$ -ra sem. Azt is meg lehet mutatni, hogy  $\psi(S, T, k+t) = \Psi(S, T, k)$  minden  $t$  természetes számra.

7.5. TÉTEL [6]. Ebben a fejezetben ismertetett vékonyító algoritmus által szolgáltatott  $I$  váz egy pixel vastagságú.

*Bizonyítás* [6]. Nyilvánvaló, hogy ha  $I$  nem tartalmaz egy  $2 \times 2$ -es négyzetes mintát sem a 17. ábrán láthatók közül, akkor  $I$  egy pixel vastagságú. Azonban, ha találunk egy vagy több  $2 \times 2$ -es mintát  $I$ -ben, akkor vagy  $I$  nem egy pixel vastagságú vagy  $I$  kritikus pontot tartalmaz. Legyen  $P$  egy olyan speciális pontja  $I$ -nek, hogy  $P \in I \ominus A^1$ . Most vizsgáljuk

meg részletesen a  $P$  pontot. Könnyű látni, hogy csak öt olyan lehetséges minta létezik a  $3 \times 3$ -as ablakban, ami tartalmazza az  $\check{A}^1$  sablont (lásd a 15., 16. és 18. ábrát). Tehát

$$(7.1) \quad P \in (I \otimes B^1) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D^1) \cup (I \otimes E^1) \cup (I \otimes E^4).$$

Hasonlóképpen, ha  $P \in I \otimes \check{A}^2$ ,  $P \in I \otimes \check{A}^3$  vagy  $P \in I \otimes \check{A}^4$ , így

$$(7.2) \quad P \in (I \otimes B^2) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D^2) \cup (I \otimes E^1) \cup (I \otimes E^2),$$

$$(7.3) \quad P \in (I \otimes B^3) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D^3) \cup (I \otimes E^2) \cup (I \otimes E^3) \text{ vagy}$$

$$(7.4) \quad P \in (I \otimes B^4) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D^4) \cup (I \otimes E^3) \cup (I \otimes E^4).$$

Minden  $P \in I \otimes A$  helyett írhatunk  $P \in (I \otimes A^1) \cup (I \otimes A^2) \cup (I \otimes A^3) \cup (I \otimes A^4)$ -t. Sőt, az  $A^i$ -k szimmetriáját felhasználva írhatunk  $P \in (I \otimes \check{A}^1) \cup (I \otimes \check{A}^2) \cup (I \otimes \check{A}^3) \cup (I \otimes \check{A}^4)$ -et. Végül a (7.1)-(7.4) írható a következő alakban is:

$$(7.5) \quad P \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D) \cup (I \otimes E).$$

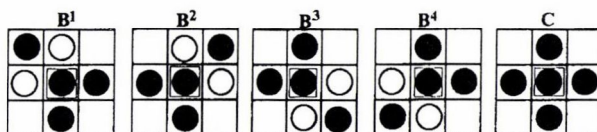
Azonban az  $S'$  és  $I$  halmazok azok, amelyekhez az algoritmus első, illetve második ciklusai konvergálnak, így  $S' \otimes D = \emptyset$  és  $I \otimes E = \emptyset$ . Ezért (7.5) a következő alakban írható:

$$(7.6) \quad P \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D).$$

Most vizsgáljuk meg az  $I \otimes D$  kifejezést. Ha  $S'$ -nek nincs  $E$ -beli mintája, azaz  $S' \otimes E = \emptyset$ , akkor  $I = S'$  és  $I \otimes D = \emptyset$ . Ha létezik legalább egy minta  $S$ -en, például  $E' \in S'$ , akkor meg kell vizsgálnunk, hogy mit kapunk, ha egy  $P \in S' \otimes E'$  pontot eltávolítunk  $S'$ -ből. Könnyen ellenőrizhetjük, hogy ha  $S \otimes E \neq \emptyset$ ,  $D$ -beli minta sohasem lehet az  $S' \odot E$  részhalmaza, tehát  $I \otimes D = \emptyset$ . Innen a (7.6) tovább egyszerűsödik

$$P \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C),$$

ahol  $B$  és  $C$  az összes lehetséges kritikus minta. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.



18. ábra

7.6. TÉTEL [6]. Ha az  $S$  8-összefüggő, akkor  $I$  is 8-összefüggő.

7.7. TÉTEL [6]. Ha  $S^w$  4-összefüggő, akkor  $I^w$  is 4-összefüggő.

7.8. TÉTEL [6]. Ha  $S$  8-összefüggő, akkor a  $\Psi$  vékonyító eljárás minden lépésben pontosan akkor őrzi meg a homotópiát, ha

$$S \setminus \Psi(S) \subseteq (S \circledast D^i) \cup (S \circledast D^{i+1}) \cup (S \circledast E^i) \quad i = 1, 2, 3, 4$$

A fenti tételek bizonyítását megtaláljuk a [6]-ban.

### Összefoglalás

Az algoritmusok empirikus vagy elméleti vizsgálata túl mutat ezen cikk keretén. Azt a feladatot sem vállaltuk fel, hogy az egyes algoritmusokat „jó”, illetve „rossz” minősítéssel lássuk el. Ez azért is nehéz feladat lenne, mert az egyes alkalmazások esetén más-más eredményt szolgáltatnak az algoritmusok. Az irodalomban található utalások alapján kideríthető, hogy a szerzők az algoritmusokat általában konkrét alkalmazások céljára tervezték. gy az utalások ismeretében megemlíthetjük, hogy például a [27]-ben található algoritmus a kínai karakterek, [25] az arab karakterek, [7] az ujjlenyomatok esetén nyújt jó eredményt.

### IRODALOM

- [1] AZRIEL ROSENFELD, „A Characterization of Parallel Thinning Algorithms”, *Information and Control* **29** (1975), 286–291.
- [2] AZRIEL ROSENFELD, „Image Analysis and Computer Vision: 1992”, *CVGIP: Image Understanding* **58** (1993), 85–135.
- [3] ANDREW K. HRECHAK, JAMES A. MCHUGH, „Automated Fingerprint Recognition Using Srstructural Matching”, *Pattern Recognition* (1990), 893–903.
- [4] AZRIEL ROSENFELD, AVINASH C. KAK, *Digital Picture Processing*, Academic Press (1992).
- [5] LLÓ G., HEGEDŰS-GY. CS., KELEMEN D., SZABÓ J., „A digitális képfeldolgozás alapproblémái.”
- [6] BEN-KWEI JANG, ROLAND T. CHIN, „Analysis of Thinning Algorithms Using Mathematical Morphology”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **12** (1990), 541–551.
- [7] BUZÁSI K., FAZEKAS G., PETHŐ A., SZABÓ E., „Számítógépes karakterfelismerő módszerek”, *Kézirat, KLTE* (1988), 86–94.
- [8] CHRISTIAN RONSE, „A topological characterization of thinning”, *Theoretical Computer Science* **43** (1986), 31–41.
- [9] CARLO ARCELLI, „Pattern thinning by contour tracing”, *Computer Graphics and Image Processing* **17** (1981), 130–144.
- [10] CHYUAN JY WU, JUN S. HUANG, „Human Face Profile Recognition by Computer”, *Pattern Recognition* **23** (1990), 255–259.
- [11] CHIN-SUNG CHEN, WEN-HSIANG TSAI, „A New Fast One-Pass Thinning Algorithm and Its Parallel HardwareImplementation”, *Pattern Recognition Letters* **11** (1990), 471–477.
- [12] E. S. DEUTSCH, „Thinning Algorithms on Rectangular, Hexagonal, and Triangular Arrays”, *Communications of the ACM* **15** (1972), 827–837.
- [13] FAZEKAS A., HERENDI TAMÁS, „Methods and applications of digital image processing”, *Bulletins for Applied Mathematics* **91** (1991), 369–378.

- [14] G. X. RITTER, J. N. WILSON, J. L. DAVIDSON, „Image Algebra: An Overview”, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **49** (1990), 297–331.
- [15] JEAN SERRA, „Introduction to Mathematical Morphology”, *Computer Vision, Graphics, and Image Processing* **35** (1986), 283–305.
- [16] J. R. PARKER, „A System for Fast Erosion and Dilation of Bi-level Images”, *Journal of Scientific Computing* **5** (1990), 187–198.
- [17] LOUISA LAM, SEONG-WHAN LEE, CHING Y. SUEN, „Thinning Methodologies — A Comprehensive Survey”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **14** (1992), 869–882.
- [18] LIANG JI, JIM PIPER, „Fast Homotopy – Preserving Skeletons Using Mathematical Morphology”, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* **14** (1992), 653–664.
- [19] MASAHIRO KAWAGOE, AKIO TOJO, „Fingerprint Pattern Classification”, *Pattern Recognition* **17** (1984), 295–303.
- [20] NABIL JEAN NACCACHE, RAJJAN SHINGHAL, „An Investigation into The Skeletonization Approach of Hilditch”, *Pattern Recognition* **17** (1984), 279–284.
- [21] PAUL C. K. KWOK, „A Thinning Algorithm by Contour Generation”, *Communications of the ACM* **31** (1988), 1314–1324.
- [22] PAVAN KUMAR, DEEPAK BHATNAGAR, P. S. UMAPATHI RAO, „Pseudo One Pass Thinning Algorithm”, *Pattern Recognition Letters* **12** (1991), 543–555.
- [23] REI-YAO WU, WEN-HSIANG TSAI, „A new one-pass parallel thinning algorithm for binary images”, *Pattern Recognition Letters* **13** (1992), 715–723.
- [24] RAYMOND W. SMITH, „Computer Processing of Line Images: A Survey”, *Pattern Recognition* **20** (1987), 7–15.
- [25] SABRI A. MAHMOUD, IBRAHIM ABUHAIBA, ROGER J. GREEN, „Skeletonization of Arabic Characters Using Clustering Based Skeletonization Algorithm (CBSA)”, *Pattern Recognition* **24** (1991), 453–464.
- [26] SHIAW-SHAN YU, WEN-HSIANG TSAI, „A New Thinning Algorithm for Gray-Scale Images by the Relaxation Technique”, *Pattern Recognition* **23** (1990), 1067–1076.
- [27] S. RIAZANOFF, B. CERVELLE, J. CHOROWICZ, „Parametrisable Skeletonization of Binary and Multilevel Images”, *Pattern Recognition Letters* **11** (1990), 25–33.
- [28] S. K. PARUI, A. DATTA, „A parallel algorithm for decomposition of binary objects through skeletonization”, *Pattern Recognition Letters* **12** (1991), 235–240.
- [29] SATOSHI SUZUKI, KEIICHI ABE, „Binary Picture Thinning by an Iterative Parallel Two-Subcycle Operation”, *Pattern Recognition* **20** (1987), 297–307.
- [30] THEO PAVLIDIS, „A Thinning Algorithm for Discrete Binary Images”, *Computer Graphics and Image Processing* **13** (1980), 142–157.
- [31] ULRICH ECKHARD, „A theoretical basis for thinning methods”, *Computer Analysis of Images and Pattern, Proceedings of the III. International Conference CAIP'89 on Automatic Image Processing* (1989), 65–70.
- [32] Y. F. TSAO, K. S. FU, „A Parallel Thinning Algorithm for 3-D Pictures”, *Computer Graphics and Image Processing* **17** (1981), 315–331.
- [33] YUNG-SHENG CHEN, WEN-HSING HSU, „A comparison of some one-pass parallel thinnings”, *Pattern Recognition Letters* **11** (1990), 35–41.
- [34] ZICHENG GUO, RICHARD W. HALL, „Parallel Thinning with Two-Subiteration Algorithms”, *Communications of the ACM* **32** (1989), 359–373.

(Beérkezett: 1994. szeptember 15.)

FAZEKAS ATTILA  
KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM  
MATEMAIKAI ÉS INFORMATIKAI INTÉZET  
4010 DEBRECEN, PF. 12

## SKELETONIZATION IN DIGITAL PICTURE PROCESSING

A. FAZEKAS

Digital picture processing is nearly 70 years old. The initial problems in transporting digital pictures are given. The space program resulted a great progress of the techniques used since the 20s. Since then the digital picture processing techniques have been used in other areas as well. There are two kind of digital picture processing, according to their applications. The first type is the transformation of the picture information into a better form for human processing. The second type is the artificial recognition. Automatic artificial recognitions are divided into three main parts by the literature. However, these parts cannot be separated sharply. This partition shows the process of recognition as well. Let us see a short overview of these part.

- Picture transformation. These processes transform the initial picture into another (so called transformed) picture, using the characteristics (e.g. brightness) of the points of the digital picture.
- Picture analysis. These processes produce the most important characteristics of the object and the background component, using the common characteristics of the objects. These characteristics are called features as well.
- Picture recognition. These processes, knowing the features, recognize the object(s) on the picture, using a knowledge base.

The division of an object into smaller objects is often useful in digital picture processing. In character recognition — which is a part of pattern recognition — a special technique, so called skeletonization is often used. This is a special picture analysis algorithm, transforming the picture into a form, which is more convenient for getting the features of the picture. Every arc of the object is substituted by an arc of one pixel width, which is approximately the middle line of the initial grid line. It is clear, that this method can successfully be used for "arc" figures. The skeleton expresses the structural relations between the main components of the initial object. Therefore the further process can be performed using the skeleton. This way the used memory can be decreased and the data structure needed for the pattern recognition can be simplified. Thus the processing time is decreased, too. In general skeletonization algorithms use digitalized, binary pictures as input and give similar pictures as output. In this paper we would like to give an overview of the literature of skeletonization. We will fix the mathematical models and concepts, necessary for this area.



## KOMPUTERALGEBRA A TUDOMÁNYOKBAN ÉS A GYAKORLATBAN

KOVÁCS ATTILA\*

Budapest

A komputeralgebra rendszerek, mint szimbolikus és numerikus számítások elvégzésére egyaránt alkalmas számítógépes rendszerek kiemelkedő jelentőségűek napjaink tudományos életében. Hatékony segítséget nyújtanak a legkülönbébb tudományterületek művelői számára, mérnökök és ipari fejlesztések nélkülözhetetlen eszközei. A tanulmány ezen rendszerek kialakulásával, fajtáival, elméleti háttérével és alkalmazásaival foglalkozik, konkrét példákkal támasztva alá az elmondottakat. Fejlődésük lehetséges perspektíváinak elemzése mellett irodalmi összefoglaló segíti a jobb áttekinthetőséget.

### 1. Bevezető

*"The impact on mathematics of computer algebra and other forms of symbolic computing will be even larger than the impact of numeric computing has been."*<sup>1</sup>

Az emberiség több évezredes történelme során a társadalom fejlődése mindig szorosan kapcsolódott a tudományokéhoz. A mai értelemben vett természettudományok pedig a matematika mindent átható erejével és fantáziájával karöltve bontakoztatták ki igazán önmagukat. Az utóbbi évtizedekben a matematika egy ma már önálló tudományt, az informatikát hívta segítségül az eddig a pusztá képzelőerő által áthághatatlan akadályok leküzdésére, önmaga és a többi tudományterület közötti távolság további csökkentésére. Szimbolikus, numerikus és grafikus számítások elvégzésére egyaránt alkalmas számítógépes rendszerek jelentek meg, amelyek az informatika fejlődésével, az algoritmikus gondolkodásmód térhódításával egyre jobbák és jobbák lettek. Új tudományterület született, amit komputeralgebrának neveztek el.

Hangsúlyozni kell a különbséget a numerikus és a szimbolikus — algebrai számítások között. Ámbár a *numerikus* számítások nemcsak elemi aritmetikai műveleteket (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) foglalnak magukba, hanem olyan bonyolult műveleteket is, mint matematikai függvények numerikus értékének, polinomok gyökeinek vagy mátrixok sajátértékének meghatározása, ezek a műveletek alapvetően számokra és csak számokra vannak értelmezve. Sőt ezek a számok a legtöbb esetben nem pontosak, pontosságuk az adott számítógépes architektúra

\* Készült a Magyar Állami Eötvös Ösztöndíj és az FKFP-0144 támogatásával.

<sup>1</sup> A.M. Cohen, et al. (ed.), *Computer Algebra for Industry: Problem Solving in Practice*, John Wiley & Sons, 1993.

lebegőpontos ábrázolási módjától függ. A numerikustól eltérően a *szimbolikus* és *algebrai* számítások matematikai objektumokat jelentő *szimbólumokon* értelmezettek. Ezek az objektumok lehetnek számok, mint pl. egészek, racionális számok, valós és komplex számok, algebrai számok, de lehetnek polinomok, racionális és trigonometrikus függvények, egyenletek, egyenletrendszerek, sőt olyan absztrakt struktúrák is, mint csoportok, gyűrűk, ideálok, algebraik vagy ezek elemei. A *szimbolikus* szó arra utal, hogy a probléma megoldása során a részeredmények lebegőpontos számok helyett szimbólumok, így a végeredmény is szimbolikus kifejezésben, zárt alakban keresendő. Az *algebrai* szó pedig a szimbolikus objektumokkal végzett műveletek algebrai eredetét jelenti. A komputeralgebra-rendszerek mint *számítógépes programok* alapfunkciója tehát az, hogy kielégítsék az alábbi követelményeket:

- matematikai objektumok szimbolikus ábrázolása,
- aritmetika ezekkel az objektumokkal.

A komputeralgebra mint *tudományterület* feladata pedig erre az aritmetikára épülő hatékony algoritmusok keresése, analízise és implementálása tudományos kutatásokhoz és alkalmazásokhoz.

## 2. A komputeralgebra-rendszerekről általában

Sem a szimbolikus számítások igénye sem a megvalósíthatóság ötlete nem újkeletű. Arról a tényről, hogy a számok nemcsak numerikus mennyiségekként, hanem szimbólumokként is felfoghatók, így írt Lord Byron lánya, Lady Ada Augusta, Countess Lovelace 1842-ben:

*"Many persons ... imagine that the business of the engine [Babbage engine] is to give results in numerical notation, the nature of its processes must consequently be arithmetical and numerical rather than algebraical and analytical. This is an error. The engine can arrange and combine its numerical quantities exactly as if they were letters or other general symbols; and in fact it might bring out its result in algebraical notation were provisions made accordingly."*

Charles Delaunay 1847-ben kezdte el számításait, amelyekben minden addiginál pontosabban megadta a Hold helyzetét az idő függvényében. Hogy a Hold aktuális pozíciójának méréséből adódó hiba halmozódását elkerülje, szimbolikusán számolt. Módszerét siker koronázta, a végső képlet 128 oldalt tett ki. A dolognak csupán két szépséghibája volt. Az egyik, hogy a számolás és ellenőrzés 20 évbe telt, a másik, hogy a számításokba 3 hiba csúszott. Ez utóbbit csak 1970-ben fedezték fel a Boeing Scientific Research Laboratories munkatársai az egyik saját fejlesztésű szimbolikusán számoló szoftver segítségével: a futási idő 20 órát vett igénybe.

A komputeralgebra-rendszerek fejlődésének története természetes módon szoros kapcsolatban áll az informatika fejlődésével. A hatvanas évek elején listakezelés céljaira tervezték a LISP programozási nyelvet, amely más nyelvektől eltérően (FORTRAN, ALGOL60) felépítésénél fogva különösen alkalmas volt szimbólumokkal tör-



ténő műveletekhez. Ámbár a későbbi rendszerek közül többet már C-ben írtak, a LISP hatása és szerepe a komputeralgebrában napjainkban is rendkívül jelentős. A számítástechnika kezdeti időszakában a különböző tudományterületek művelői szimbolikus számításaik megkönnyítése és felgyorsítása érdekében kezdték el fejleszteni az első komputeralgebra rendszereket, amelyek átdolgozva, megújulva és a sokadik változatban napjainkban is jelen vannak. A legismertebb ilyen ún. *speciális célú* komputeralgebra rendszerek:

- algebrai geometria: Macaulay ([27, 59])
- relativitáselmélet: Sheep, Stensor ([20, 35, 45])
- csoportelmélet: Cayley, Gap ([9, 10, 56])
- égi mechanika: Camal ([5])
- kommutatív algebra: CoCoA, Macaulay ([11, 24, 27, 58])
- Lie-algebrák: LiE ([44])
- nagyenergiájú fizika: Form, Schoonship ([53, 62, 60])
- számelmélet: Pari, Simath, Kant ([6, 26, 34])

A hetvenes években jelentek meg az *általános célú* komputeralgebra-rendszerek, amelyeket beépített adatstruktúrák, matematikai függvények és algoritmusok széles választéka jellemez, minél nagyobb felhasználói területet próbálva meg lefedni. A jelentős számítógépes erőforrásigény miatt robbanásszerű elterjedésük a nyolcvanas évek elejére, a mikroprocesszor alapú munkaállomások megjelenésének idejére tehető. A jobb hardver környezet, a hatékonyabb erőforrásgazdálkodás, rendszerfüggetlen magasszintű alapszintű (C) használata és nem utolsósorban a társadalmi-gazdasági igények fokozatosan piaci termékévé érlelték az általános célú komputeralgebra-rendszereket, ami viszont erős javulást hozott a felhasználói felület és dokumentumkészítés terén. A jól megtervezett grafikus interfész jelentőségének felismerése — ami elsőként talán S. Wolfram Notebook-jában öltött testet — lényeges szerepet játszott elterjedésükben. Az alábbiakban azokat az általános célú rendszereket soroljuk fel, amelyek vagy a legtöbbet kínálják a létező komputeralgebra algoritmusok közül vagy valamilyen különleges tulajdonságuk miatt érdeklődésre tarthatnak igényt.

- A Macsyma ([47]) az egyik legrégebbi általános célú komputeralgebra-rendszer. Matematikai algoritmusok széles skáláját tartalmazza, de erőforrásigénye nagy, és csak kisszámú platformon futtatható. Jelen pillanatban több változata is elérhető.
- A Reduce ([30, 46]) nagyenergiájú fizikához készített speciális célú rendszerből fejlődött általános célú rendszerré. A Macsyma-val összehasonlítva a lehetőségei szűkebbek. Nagy előnye viszont, hogy a forráskód elérhető, miáltal könnyen módosítható és bővíthető. A Reduce-t aktívan fejlesztik.
- A Derive ([59]) az egyetlen olyan általános célú rendszer, amelyet korlátozott erőforrásokkal rendelkező számítógépekre (főleg személyi számítógépekre) terveztek. A Derive nem túl széles programnyelvi, de annál szerteágazóbb, a felhasználót támogató rutinkészlettel ren-

delkezik. Említésre érdemes, hogy a Texas Instrument TI-92 kalkulátorába Derive függvényeket épített.

- MuPAD ([21, 22]) — Multi Processing Algebra Data Tool. A rendszer legjelentősebb tulajdonsága a párhuzamos szerkezet. A szimbolikus és numerikus számítások párhuzamos elvégzésén túl vizualizációs lehetőségeket is magában foglal. A szoftver szabadon terjeszthető és az aktív fejlesztésnek köszönhetően matematikai tudása gyorsan nő.
- A Maple ([13, 14, 15, 32, 38, 51]) nyelvet a többfelhasználós működés céljainak megfelelően tervezték. Egy kis tárhelyet igénylő program (az ún. kernel) ügyel a hardverközei feladatokra (parancsértelmezés, aritmetikai műveletek, memóriakezelés stb.) és tartalmazza a legfontosabb eljárásokat. A matematikai tudás többi része — amit szintén Maple-ben írtak — csak akkor töltődik be az operatív memóriába, ha erre igény lép fel. Rugalmasságának köszönhetően az eljárásokat a felhasználók könnyen beilleszthetik vagy módosíthatják. Jelen pillanatban a Maple az egyik legelterjedtebb általános célú komputeralgebra rendszer.
- A Mathematica ([48, 64, 57]) az első olyan matematikai számításokra alkalmas rendszer, amely felhasználóbarát módon egyesíti magában a szimbolikus, numerikus és grafikus lehetőségeket. Jól struktúrált felhasználói szintű programozási lehetőséggel rendelkezik és a legkülönbözőbb számítógépes architektúrákon is futtatható.
- Az Axiom ([36]) elődje a „Scratchpad”, az IBM Research Center fejlesztése. Az Axiom már az informatika legújabb eredményein alapszik: erősen típusos programnyelv, könyvtárrendszere absztrakt adattípusok hierarchikusan szervezett kollekcója, ezáltal a felhasználó az algebrai struktúrák legkülönbözőbb típusait kezelheti és definiálhatja. Az Axiom tervezése (ami olyan objektumorientált elemeket is tartalmaz, mint adatabsztrakció, öröklődés, polimorfizmus stb.) kísérlet az elmúlt 100 év „konstruktív matematikájának” modellezésére.

Az alábbi tulajdonságokat a legtöbb általános célú komputeralgebra rendszer magában foglalja:

- interaktivitás,
- matematikai tények ismerete,
- matematikai objektumok kezelésére képes deklaratív<sup>2</sup>, magas szintű programozási nyelv funkcionális programozási lehetőségekkel,
- az operációs rendszer és más programok felé való kiterjeszthetőség,
- szimbolikus és numerikus számítások integrálása,
- automatikus (optimalizált) C és Fortran kódszegmens generálása,
- grafikus felhasználói környezet,
- 2 és 3 dimenziós grafika, animáció,

<sup>2</sup> A deklaratív programozási nyelvek a kívánt eredményt specifikálják és nem a hozzájuk vezető utat, mint ahogy az imperatív nyelvek teszik.

- szövegszerkesztési lehetőség és automatikus LaTeX konverzió,
- on-line súgó rendszer.

A komputeralgebra-rendszereket *matematikai szakértői rendszereknek* is nevezik. Napjainkban az általános célú komputeralgebra-rendszerek szédítő iramú fejlődésének lehetünk szemtanúi, elsősorban tudásuknak és széleskörű alkalmazhatóságuknak köszönhetően. Mégis hiba volna alábecsülni a speciális rendszereket, amelyek egyrészt igen fontos szerepet játszanak sok tudományterületen, másrészt sok esetben könnyebben kezelhetők és hatékonyabbak, jelölésrendszerük és algoritmusaik alacsony szintű programnyelvi implementációja miatt. Nagyon lényeges, hogy egy adott probléma megoldásához az arra legalkalmasabb komputeralgebra-rendszert válasszuk ki.

### 3. Komputeralgebrai algoritmusok

*Első matematikus:* ...szóval az algoritmusod három részből áll. Az első az input, a harmadik az output. És mi a második?  
*Második matematikus:* A második lépés? Ahol a csoda történik.  
*Első matematikus:* Értem. Tudnál erről egy kicsit többet is mondani?

A könnyebb megértés kedvéért tekintsünk pár nagyon egyszerű példát<sup>3</sup>:

- A több mint ezer jegyű  $450!$  kiszámolása, a 41 jegyű  $35! + 1$  faktorizálása és az  $f(x) = \sin(2x^3 + e^{\sqrt{1+7x^2}})$  függvény MacLaurin sora első ötven együtthatójának meghatározása együtt körülbelül három másodperc.
- Az  $x + y + z = 3, x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^3 + y^3 + z^3 = 24$  egyenleteket kielégítő valós  $x, y, z$  értékekre az  $x^4 + y^4 + z^4$  kifejezés kiszámolása körülbelül egy másodperc.
- Az  $\int \sqrt{x} \sin(x) \cos(x) dx$  integrál zárt alakjának meghatározása kevesebb, mint két másodperc.

Az első pontban igazi meglepetés nincs. Az egészek faktorizálására régóta ismeretek — sajnos nem polinomiális — módszerek (Pollard, Lenstra, Morrison-Brillhart stb.), legfeljebb a rutinmunka sebessége lephet meg bennünket. De lássuk, mi a helyzet a második és a harmadik ponttal.

Ahogy a mai modern komputeralgebra-rendszerek nem létezhetnének a számítástechnikai ipar igen látványos eredményei nélkül, ugyanez elmondható a számítástudományról is. A szimbolikus objektumok reprezentációs lehetőségei és a velük való műveletek vizsgálata már a hetvenes évek elején megkezdődött, különböző realizációk is születtek. A számítástechnika fejlődése aztán új lendületet adott az algoritmus-fejlesztéshez, az alkalmazások pedig újabb és újabb fejlesztést tettek szükségessé.

<sup>3</sup> MapleV Release 4.0b, Pentium75

A természettudományok többsége jelenségeit, gondolatait matematikai egyenletekbe foglalja. A lineáris egyenletek, egyenletrendszerek szimbolikus megoldásainak vizsgálatai az ismert eliminációs módszereken alapszanak. Magasabb fokú egyenletek helyett nemritkán lineáris approximációt használunk a nemlineáris egyenletek nehéz kezelhetősége miatt. A hatvanas évek közepén Buchberger Ph.D. dolgozatában kidolgozott egy módszert tetszőleges fokú, többváltozós polinomegyenletek hatékony kezelésére, amit ma *Gröbner-bázis elmélet* néven ismerünk. Az alapgondolat a következő: tekintsük az  $f, f_1, f_2, \dots, f_r$  valamilyen test feletti  $n$  változós polinomgyűrű elemeit és döntsük el, hogy  $f$  eleme-e az  $f_1, f_2, \dots, f_r$  polinomok által generált ideálnak. Buchberger munkájára csak tíz évvel felfedezése után kezdtek felfigyelni, azóta a terület a komputeralgebra egyik legnépszerűbb ága. (A fejezet elején adott második példa megoldásához ezt a módszert használtuk.) Egy másik lehetőség nemlineáris egyenletrendszerek szimbolikus megoldására a rezultáns módszer, ami lényegileg eliminációs lépések sorozata. A Gröbner-bázis használatának előnye, hogy segítségével a megoldáson kívül betekintést nyerhetünk a probléma struktúrájába, a rezultáns módszeré az alacsonyabb komplexitás. A hetvenes évek közepén Collins mutatott egy másik eljárást nemlineáris egyenletek és egyenlőtlenségek egzakt valós gyökeinek meghatározására.

Lényeges előrelépés történt a szimbolikus integrálás területén is. Habár a probléma formális természete már régóta ismeretes (Liouville's Principle), csak 1969-ben tudott R. Risch hatékony algoritmust adni annak eldöntésére, hogy ha adott egy valós elemi  $f$  függvény, akkor az  $\int f(x)dx$  integrál is elemi-e és ha igen, az algoritmus meg is adja azt (elemi függvények halmazán azt a halmazt értjük, amelyet  $\mathbb{Q}(x)$ -ből kiindulva rekurzív módon összegeket, szorzatokat, hányadosokat, logaritmusokat, exponenciális és algebrai függvényeket valamint ezek kompozícióit képezve kapunk). Figyelemre méltó algoritmusok születtek differenciálegyenletek szimbolikus megoldásainak vizsgálatában is. A Risch-algoritmushoz hasonló döntési eljárás létezik racionálisfüggvény-együtthatójú homogén másodrendű közönséges differenciálegyenlet zárt alakú megoldásainak meghatározására (Kovacic-algoritmus, [39]). Magasabb rendű lineáris esetben az Abramov-eljárás ([3]) a polinomegyütthatós egyenletek zárt racionális megoldásait, a Bronstein-algoritmus ([7]) pedig az  $\exp(\int f(x)dx)$  alakú megoldásokat határozza meg. Az egyik legújabb eredményt M. van Hoeij adta ([33]), aki minden eddiginél jobb algoritmust talált formális hatványsorok és racionális függvények feletti lineáris differenciáloperátorok faktorizálására. Parciális differenciálegyenletek esetében a Lie-féle szimmetria-módszerek állnak rendelkezésre.

A faktorizáláson alapuló eljárások komoly jelentőséggel bírnak a komputeralgebrai algoritmusok kutatásában. Olyannyira igaz ez a megállapítás, hogy sokan az egész tudományterület születését Berlekamp azon publikációjától számítják, amelyben hatékony algoritmust ad kis  $p$  karakterisztikájú véges testek feletti egyváltozós polinomok faktorizációjára. Ekkor, 1969-ben vált először világossá, hogy a polinomfaktorizáció algoritmikus időbonyolultsága kisebb lehet az egészek faktorizációjánál: két elemű test esetén egy  $n$ -edfokú polinom faktorizációja (ahol a polinom egy  $n$  bites egészszel reprezentálható) csak  $\mathcal{O}(n^3)$ , míg az ugyanakkora egészé expo-

nenciális komplexitású. Ez utóbbi tény később a prímség gyors eldönthetőségével párosítva egy másik tudományterület, a modern kriptográfia alapjait vetette meg. Berlekamp eredményét később nagyobb  $p$  karakterisztikákra is kiterjesztette. Hogy hasonlóan jó futási időt kapjon, az algoritmusába véletlen elemeket illesztett. Ez volt talán az első olyan algoritmus, ami randomizált elemek felhasználásával polinomiálissá tett egy determinisztikusan exponenciális időbonyolultságú problémát. A mai komputeralgebra rendszerek nagyobb véges testekre is rutinszerűen alkalmazzák Berlekamp eljárását talán anélkül, hogy a felhasználók többségének az algoritmus valószínűségi eredetéről tudomása lenne.

Nemsokkal azután, hogy a véges testek feletti polinomfaktorizáció megoldódott, Zassenhaus van der Waerden 1936-os *Moderne Algebra* könyvét alapulvéve a  $p$ -adikus számok aritmetikájának ún. *Hensel-lemmáját* alkalmazta a faktorok kiterjesztésére. A 'Hensel lifting' — ahogy ma az eljárását nevezik — egy általános megközelítési módszer arra, hogyan rekonstruáljuk a faktorokat moduláris képeikből. Az interpolációval ellentétben, ami több képpont meglétét követeli meg, a Hensel lifting csak egyetlen képpontot igényel. Az egész együtthatós polinomok faktorizációjára adott Berlekamp–Zassenhaus-féle algoritmus alapvető jelentőségű, mégis rejteget magában két csapdát. Az egyik, hogy bizonyos fajta polinomokra az algoritmus időkomplexitása exponenciális. Sajnos az algebrai számtestekre épített polinomok faktorizációjánál (a Kronecker-módszer, ami alapvetően az egész polinomok faktorizációjára vezethető vissza) sok ilyen 'rossz' polinom kerül elő. A második, hogy többváltozós polinomokra hasonló reprezentációs probléma lép fel, mint amelyet ritka mátrixok Gauss-eliminációjánál tapasztalunk. Az első problémát egy, a számok geometriáján alapuló diofantoszi optimalizálás, a Lenstra–Lenstra–Lovász nevével fémjelzett ún. rácspontrdukciós algoritmus oldotta meg, amit a Berlekamp-módszerrel együtt használnak. Ezen polinomiális algoritmus mellé még egy olyan eljárás társul, amely arról gondoskodik, hogy a Hensel lifting 'jó' moduláris képről induljon és mikor érjen véget. A többváltozós polinomfaktorizáció említett reprezentációs problémájára is születtek megoldások, közülük az ún. black-box megközelítés tűnik a legjobbnak. Ez a második olyan terület, ahol a randomizálás kritikus szerepet kap a hatékony algoritmusok tervezésében.

Nem szabad azonban túlbecsülni az algoritmusok elméleti komplexitása vizsgálata során kapott eredményeket: a gyakorlatban a Berlekamp–Zassenhaus–Hensel-féle algoritmus hatékonyabban működik, mint az elméletileg jobb Lenstra–Lenstra–Lovász-féle eljárás. Hasonló jelenség figyelhető meg a nagy egész számok szorzásánál. A Karacuba-algoritmus komplexitása  $\mathcal{O}(n^{\log_2 3})$ , míg a Schönhage–Strassen-algoritmusé  $\mathcal{O}(n \log n \log \log n)$ , a komputeralgebrai rendszerek mégis a Karacuba-módszert használják nagypontosságú egészek szorzására, mert a másik módszer előnye csak asztronómiai méretű számoknál mutatkozik meg.

Mivel a komputeralgebra-rendszerek szimbolikusan, teljes pontossággal számolnak, az algoritmusok időbonyolultságának vizsgálatán kívül mindig szükség van a tárbonyolultságuk vizsgálatára is. Tekintsünk egyszerű példaként egy  $n$  ismeretlenes  $n$  egyenletből álló lineáris egyenletrendszert, ahol minden egyes egész együttható elfér a számítógép  $\omega$  hosszúságú rekeszében. Könnyű észrevenni, hogy a szokásos

egész Gauss-eliminációt alkalmazva a redukció eredményeként kapott együtthatók egyenként  $2^{n-1}\omega$  tárhelyet igényelnek. Ha az együtthatók polinomok lennének és polinomaritmetikát használnánk, az eredménypolinomok együtthatóinak mérete, csakúgy mint a foksámuk exponenciális növekedést mutatna. A megfigyelt exponenciális növekedés ellenére a kapott végeredmény mégis 'normális' méretű, hiszen a Cramer-szabály miatt a megoldások determinánsok hányadosaiként is megkaphatók, amelyek pedig közelítőleg csak  $n\omega$  tárhelyet igényelnek. Ezt a jelenséget nevezi az irodalom *intermediate expression swell*-nek. Előfordulása gyakori a komputeralgebrai algoritmusokban. Fontos példa a polinomok legnagyobb közös osztójának meghatározására szolgáló algoritmus, amelyet a polinomfaktorizálástól a szimbolikus integrálásig sok más eljárás is használ. A hagyományos módszerek mellett (polynomial remainder sequences) a heurisztikának ez esetben is komoly jelentősége van.

Valójában a heurisztikus, probabilisztikus módszereknek egy új elmélete van születőben a komputeralgebrában egyrészt az intermediate expression swell elkerülésére, másrészt a determinisztikusan magas komplexitású algoritmusok hatékonyságának növelésére. A probabilisztikus algoritmusok esetében a nem megfelelő működésnek is van pozitív valószínűsége, ami vagy az esetleges rossz válaszban nyilvánul meg (Monte Carlo csoport) vagy, habár sohasem kapunk rossz választ, elképzelhető, hogy polinomiális időben nem kapunk semmit (Las Vegas csoport). A már említetteken kívül szép eredményeket értek el heurisztikákkal többek között polinomazonosság tesztelésénél, polinomok irreducibilitásának vizsgálatánál, mátrixok normálformáinak (Frobenius, Hilbert, Smith) meghatározásánál. Szerepük minden valószínűség szerint a jövőben is növekedni fog.

A fejezet eddigi részében a lényegesebb szimbolikus algoritmusok közül csemegeztünk. Korábban említettük, hogy a komputeralgebra rendszerek képesek numerikus számítások elvégzésére is: a hagyományostól eltérően a számítási pontosságot a felhasználó határozhatja meg. Gyakran előfordul, hogy a szimbolikus és numerikus számításokat együtt célszerű használni. Tekintsük például egy differenciálegyenlet szimbolikusan kiszámolt hatványsor megoldását. A csonkított hatványsort ezután bizonyos pontokban a szokásos lebegőpontos aritmetikával kiértékelve a differenciálegyenlet megoldásának numerikus approximációját kapjuk. Amennyiben a megoldandó probléma valamilyen valós fizikai probléma approximációja, a szimbolikus számítások vonzó lehetőségei gyakran érvényüket veszítik; egyszerűen mert túl bonyolultak vagy túl lassúak ahhoz, hogy hasznosak vagy szükségesek legyenek, hiszen a megoldást is numerikusan keressük. Más esetekben, ha a probléma szimbolikusan kezelhetetlen, az egyetlen lehetséges út a numerikus approximációs módszerek használata. Ilyen akkor fordulhat elő, ha a létező szimbolikus algoritmus nem talál zárt megoldást (pl. nem elemi függvények integrálja stb.), vagy nem létezik a problémát kezelni tudó szimbolikus algoritmus. Ámbár egyre több numerikus algoritmusnak létezik szimbolikus megfelelője, a numerikus eljárások nagyon fontosak a komputeralgebrában. Gondoljunk csak a differenciál- és integrálszámítás területére: bizonyos esetekben a hagyományos algoritmusok — in-

integráltranszformációk, hatványsor-approximációk, perturbációs módszerek — lehetnek a legcélravezetőbbek.

A komputeralgebra algoritmusok tervezésénél a jövőben egyre nagyobb szerepet kapnak a párhuzamos architektúrájú számítógépek. Habár sok meglévő algoritmus „ránézésre” párhuzamosítható, nem biztos, hogy a jó szekvenciális algoritmusok párhuzamos számítógépeken is a legjobbak lesznek: az optimum talán egy teljesen különböző eljárással érhető el.

#### 4. A komputeralgebra-rendszerek jelentősége, alkalmazásai

A komputeralgebra-rendszerek használatának legalább három oka lehet: olyan szimbolikus számításokat szeretnénk végezni, amelyek

- papírceruza-módszerrel is végrehajthatók, de számítógéppel gyorsabban és „félreszámolás”-mentesen,
- papírceruza-módszerrel reménytelennek tűnnek, de számítógéppel a meglévő algoritmusoknak és matematikai technikáknak köszönhetően többé-kevésbé rutinszerűen hajthatók végre,
- komoly előkészületeket és erőfeszítéseket igényelnek még számítógép használatával is. Az ilyen jellegű problémák számítógép nélkül általában megoldhatatlanok. Fennmarad tehát a jobb és gyorsabb algoritmusok keresésének feladata annak minden nehézségével és szépségével együtt.

A szimbolikus számítások igénye nagyon sok tudományterület problémáinak megoldása során felmerül, alkalmazások széles rétege előtt nyitva ezzel új fejezetet. A komputeralgebrát ez a „határtudomány” pozíciója kutatói szempontból mélységgel és gazdagsággal, de ugyanúgy nehézséggel és változékonysággal is felruházza. Az eddig elmondottakból kitűnik, hogy ezek a rendszerek nemcsak tudományos kutatók és elméleti szakemberek, hanem mérnökök és ipari kutatócsoportok munkatársai számára is jól használhatóak.

*“Mathematics is a basis of technological progress, and technological progress is a key for international competitiveness. Automating an important part of the mathematical program-solving process is a key technology for a nation that wishes to control, structure, and accelerate technological progress. The automation of the solution of mathematical problems is a powerful lever by which human productivity and expertise can be amplified many times.”<sup>4</sup>*

A világ vezető államai felismerve a komputeralgebra-rendszerek nemzetgazdasági jelentőségét egyre növekvő mértékű támogatást nyújtanak oktatásához, tudományos és ipari kutatóműhelyek létrehozásához, a tudományterület népszerűsítéséhez. A világ számos egyetemén oktatják a matematika alapjait valamilyen

<sup>4</sup> A.C. Hearn, Ann Boyle, B.F. Caviness. *Future Directions for Research in Symbolic Computation*, Siam Reports on Issues in the Mathematical Sciences, Philadelphia, 1990.

általános célú komputeralgebrai program (általában Maple és Mathematica) segítségével, így a matematika absztrakt objektumai „kézzelfoghatóvá” válnak, az új gondolatokat, tételeket és azok alkalmazásait azonnal ki is lehet próbálni. Az elmúlt években hazánk számos egyetemén és főiskoláján indult meg a komputeralgebra rendszerek oktatási keretek közé illesztése. Az Eötvös Loránd Tudományegyetem Komputeralgebra Tanszékének gondozásában az alkalmazásokon kívül megismerhető ezen rendszerek matematikai és informatikai háttere is.

Az alábbiakban megemlítünk néhány olyan területet, ahol komputeralgebra-rendszerek alkalmazása révén komoly eredmények születtek:

- matematika — algebra, algebrai geometria, analízis, bifurkációelmélet, csoportelmélet, geometria, kriptográfia, kódelmélet, kombinatorika, numerikus analízis, számelmélet, topológia, valószínűségelmélet,
- fizika — asztrofizika, atomfizika, relativitáselmélet, égi mechanika, folyadék mechanika, kvantumelektro- és kromodinamika, kvantummechanikai perturbációelmélet, nagyenergiájú fizika, nukleáris mágneses rezonanciavizsgálat, optika, plazmafizika, szilárdtestfizika,
- kémia — biokémia, gyógyszeripar, reakcióegyenletek analízise, molekulák struktúraanalízise, komplex reagáló rendszerek stabilis egyensúlyának vizsgálata, molekulák térbeli mozgásának mechanikája,
- mérnöki tudományok — antennatervezés, elektronikus hálózatok analízise, geostatisztika, hajótesttervezés, helikopterrotor-tervezés, hidrodinamika, kép- és jelfeldolgozás, kontrollelmélet, radartervezés, robotika, turbinatervezés stb.

A szimbolikus matematika egyik legérdekesebb felhasználói területe a matematika önmaga.

*“I see the main role of symbolic algebra systems as that of helping to formulate hypotheses, search for examples and counterexamples, and in general explore ramifications of mathematical models. In other words, the main role of these systems is to obtain mathematical insight. Once that insight is obtained, one can then go on and construct canonical mathematical proofs, in which there might not even be any traces of the use of computer algebra.”*<sup>5</sup>

Két, a tanszékünk témáiból vett példával szeretném illusztrálni a szimbolikus számítások hasznosságát az elméleti matematikában.

<sup>5</sup> A.M. Odlyzko, *Applications of symbolic mathematics to mathematics*, Applications of Computer Algebra, Kluwer Academic Press, Boston, 1985.



### Komplex halmazok.

Bizonyos fajta szimmetria-tulajdonságokkal rendelkező, kvadratikus iterációból származó komplex halmazok vizsgálatára irányul az első probléma. Adjuk meg az összes olyan  $\Gamma$  halmazt, amire

$$\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R},$$

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\} = \{-\gamma_1, -\gamma_2, \dots, -\gamma_N\} = -\Gamma,$$

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\} = \{\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \dots, \bar{\gamma}_N\} = \bar{\Gamma},$$

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N\} = \{R(\gamma_1), R(\gamma_2), \dots, R(\gamma_N)\} = R(\Gamma),$$

ahol  $R(x) = Ax^2 + Ax + E$ ,  $A, E \in \mathbb{R}$ ,  $A, E \neq 0$ ,  $\gamma_i \neq \gamma_j \forall i \neq j$  és amelynek egyetlen valódi részhalmaza sem elégíti ki az iménti feltételeket.

**Sejtés:**  $\Gamma = \{\sqrt{E}, -\sqrt{E}\}$ ,  $E < 0$ .

A szóbajöhető  $\Gamma$ -kat vizsgálva,  $\text{card}(\Gamma) \leq 100$ -ra a sejtés a szimmetrikus polinomok Newton–Girard-formuláit és a rezultáns módszert használva számítógéppel viszonylag gyorsan verifikálható, míg „kézzel” számolva a  $\text{card}(\Gamma) = 8$  eset is komoly munkát igényel. Az általános bizonyítás nehéznek tűnik ([42]). A feladat természetéből adódóan numerikus számítási módszerek használata itt nem realizálható.

### Teljesen additív függvények és kongruenciák.

Jelöljön  $P(z) := 1 + A_1z + A_2z^2 + \dots + A_kz^k$  ( $k \geq 1$ ) egy valós együtthatós polinomot,  $P(z) \notin \mathbb{Q}[z]$ . Jelölje továbbá  $E$  a végtelen sorozatok lineáris terének  $Ez_n := z_{n+1}$  operátorát. A  $P(E) = I + A_1E + \dots + A_kE^k$  operátort az  $f(n)$  függvényre alkalmazva kapjuk, hogy  $P(E)f(n) = f(n) + A_1f(n+1) + \dots + A_kf(n+k)$ .

**Sejtés:** Legyen  $k \in \mathbb{N}$  rögzített. Ha egy teljesen additív valós értékű  $f$  függvény  $\forall n \in \mathbb{N}$  esetén kielégíti a  $P(E)f(n) \equiv 0 \pmod{1}$  kongruenciaegyenletet, akkor  $f(n) = 0 \forall n \in \mathbb{N}$  esetre.

Kis  $k$  értékekre ( $k = 2, 3, 4$ ) a bizonyítás két részből áll. Először be kell látni, hogy az állításban foglaltak igazak valamilyen  $n \leq N$  korlátra, aztán ez alapján a második lépésben  $\forall n \in \mathbb{N}$ -re. A sejtés bizonyításának első része már  $k = 4, 5, \dots$  esetében is elképzelhetetlen lenne szimbolikus program használata nélkül. Megjegyzendő, hogy  $k = 5, 6, \dots$ -ra teljes bizonyítás nem ismeretes, az általános bizonyítás ( $\forall k$ -ra) itt is nehéznek tűnik ([43]).

A következő példával a szimbolikus programozási nyelvek gyakorlati jelentőségét szeretném bemutatni. A modellben a futóműnek a vázhoz való felfüggesztésén keresztül a kényelmes, zötyögésmentes autózás lehetőségeit vizsgáljuk<sup>6</sup>.

### Lengéscsillapítók az autóiparban.

<sup>6</sup>A használt programnyelv a MapleV Release 4.0b

Jelölje  $m$  az autó tömegét,  $k$  a felfüggesztésnél használt rugóra jellemző állandót és  $b$  a lengéscsillapító minőségére jellemző, a lengéscsillapítás erősségét megadó konstans értéket, valamint  $x(t)$  a  $t$ -edik időpillanatban az autó karosszériájának az úthoz viszonyított magasságát. Ekkor a csillapított rezgés jelenségének egyenletét felírva az alábbi állandó együtthatós, homogén másodrendű lineáris differenciálegyenletet használhatjuk:  $mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0$ .

a) Adjuk meg az egyenlet általános megoldását attól a pillanattól kezdve, amikor az autó egy váratlan gödörbe kerülve  $v_0$  m/s függőleges irányú sebességre tesz szert, miközben a karosszéria  $y$  méterrel kerül közelebb az úthoz.

b) Rajzoljuk ki a karosszéria úthoz viszonyított magasságának a változását az első 15 másodpercben, ha  $m = 1000$  kg,  $b = 300$  kg/s,  $k = 2500$  kg/s<sup>2</sup>,  $v_0 = 20$  cm/s,  $y = 8$  cm.

c) Mekkora lesz a kilengés 5 másodperc múlva? Mekkora a maximális kilengés?

d) Hogyan függ a kilengés az autó tömegétől? Vizsgáljuk meg a kérdést az előbbi adatokkal, az autó tömege legyen 500 és 1500 kg közötti.

e) Mekkora lenne a minimális értéke a lengéscsillapítási konstansnak, ha teljesen sima, (elméletileg) „ugrálásmentes” utazást szeretnénk?

Először oldjuk meg a differenciálegyenletet a megadott kezdeti érték feltételekkel:

```
> ODE:= m*diff(x(t), [t$2]) + b*diff(x(t), t)+k*x(t) = 0;
```

$$ODE := m \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} x(t) \right) + b \left( \frac{\partial}{\partial t} x(t) \right) + k x(t) = 0$$

```
> kezd_felt:=x(0)= y, D(x)(0) = v[0]:
```

```
> mego:=dsolve({ODE,kezd_felt},x(t));
```

$$\begin{aligned} mego := x(t) = & \frac{1}{2} \frac{(by + \sqrt{b^2 - 4mk}y + 2v_0m) e^{(-1/2 \frac{(b - \sqrt{b^2 - 4mk})t}{m})}}{\sqrt{b^2 - 4mk}} \\ & - \frac{1}{2} \frac{(by - \sqrt{b^2 - 4mk}y + 2v_0m) e^{(-1/2 \frac{(b + \sqrt{b^2 - 4mk})t}{m})}}{\sqrt{b^2 - 4mk}} \end{aligned}$$

Rajzoljuk ki a kilengést az első 15 másodpercben:

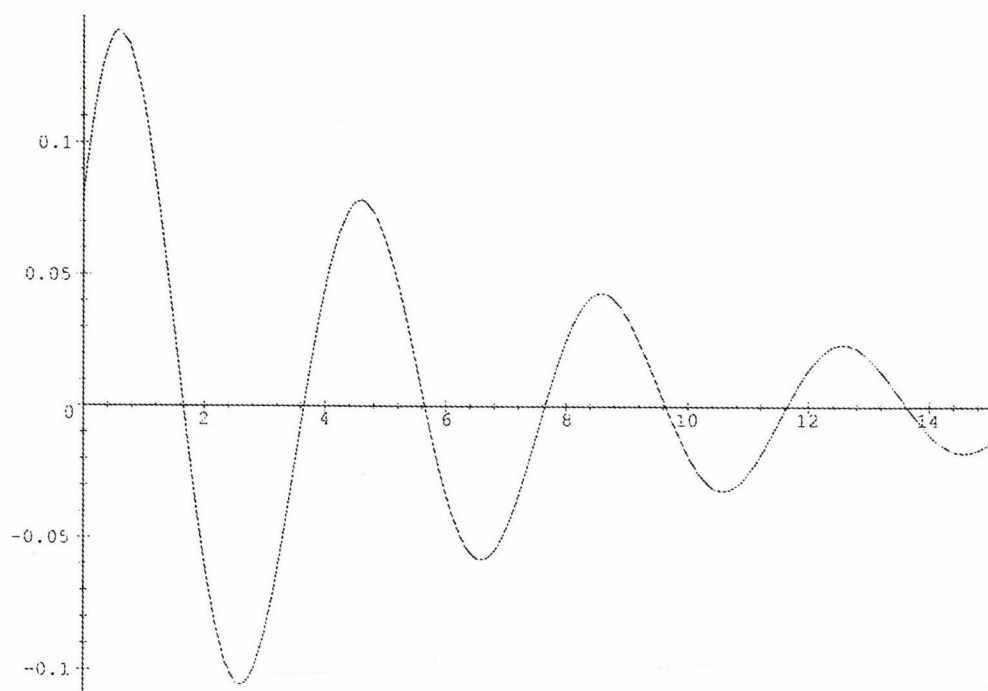
```
> f:=unapply(subs(m=1000,b=300,k=2500,v[0]= 0.2,y=0.08,
```

```
> rhs(mego)),t);
```

$$\begin{aligned} f := t \rightarrow & -\frac{1}{19820000} (424.00 + .08 \sqrt{-9910000}) \sqrt{-9910000} e^{(-1/2000 (300 - \sqrt{-9910000}) t)} \\ & + \frac{1}{19820000} (424.00 - .08 \sqrt{-9910000}) \sqrt{-9910000} e^{(-1/2000 (300 + \sqrt{-9910000}) t)} \end{aligned}$$

```
> plot(f,0..15);
```

A kilengés az 5. másodpercben:



```
> x(5)= evalf(f(5))
```

$$x(5) = .06300718586$$

A zökkenés pillanatától a maximális kilengésig eltelt idő, és abban a pillanatban a kilengés mértéke:

```
> fsolve(diff(f(t),t),t,0..2);
```

$$.5970840377$$

```
> x(")=evalf(f(");
```

$$x(.5970840377) = .1425887428$$

A kilengés vizsgálata az eltelt idő és az autó tömegének függvényében:

```
> g:=unapply(subs(b=300,k=2500,v[0]= 0.2,y=0.08,rhs(mego)),t,m);
```

$$g := (t, m) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{(24.00 + .08 \sqrt{90000 - 10000 m} + .4 m) e^{(-1/2 \frac{(300 - \sqrt{90000 - 10000 m}) t}{m})}}{\sqrt{90000 - 10000 m}} - \frac{1}{2} \frac{(24.00 - .08 \sqrt{90000 - 10000 m} + .4 m) e^{(-1/2 \frac{(300 + \sqrt{90000 - 10000 m}) t}{m})}}{\sqrt{90000 - 10000 m}}$$

```
> plot3d(g(t,m),t=0..15,m=500..1500,axes=BOXED,orientation=
> [-45,35],style=PATCH,title='Lengéscsillapítás vizsgálata');
```

Ismert, hogy a rezgés pontosan akkor osszcillációmentes, ha a differenciálegyenlet karakterisztikus egyenlete gyökei valósak. A minimális lengéscsillapítási konstans akkor kapjuk, ha az említett egyenlet diszkriminánsa nulla, vagyis ha

```
> b=sqrt(4*1000*2500);
```

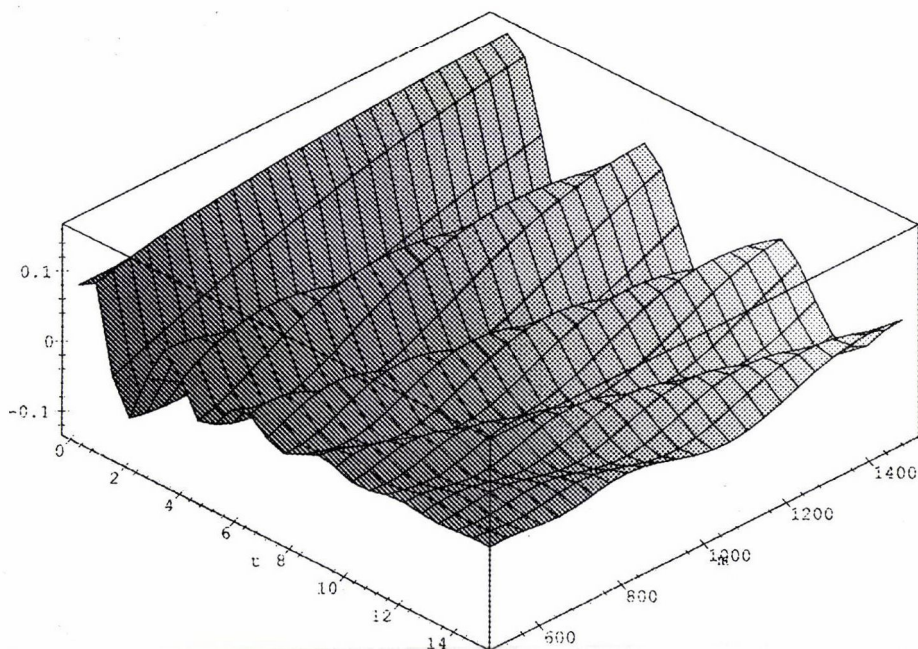
$$b = 1000 \sqrt{10}$$

Figyeljük meg, hogy az „ugrálásmentes” utazáshoz az eredetinél több, mint tízszer erősebb lengéscsillapító kell:

```
> evalf(rhs("))/300;
```

$$10.54092553$$

Számításaink során bizonyos esetekben szimbolikus, máskor numerikus módszereket használtunk, mindig a legkézenfekvőbbet alkalmazva.



### 5. Korlátok és a jövő perspektívái

A jövőbe tekintő spekulációk általában a közelmúlt relatíve biztonságos extrapolációi, esetleg valamilyen kevésbé megbízható trendek és lehetőségek kockázatos

előrevetítései. Egy fiatal, gyorsan változó tudományterület, mint például a komputeralgebra esetében bármiféle előrejelzés nehéz, hiszen a számítástudomány önmagában is viharos sebességgel fejlődő ágazat. A kereskedelmi szektor agresszívan keresi a lehetőséget a szimbolikus szoftverek terjesztésére, egyre több kutatóhoz, mérnökhöz, diákhöz juttatva el így őket. Ezt egybevetve az előző fejezetben mutatott alkalmazhatósági lehetőségekkel, fogalmat alkothatunk a fejlődés várható dinamikájáról. Az alábbiakban az eddigi hiányosságokat, korlátokat valamint a lehetséges igényeket szeretném összefoglalni, talán a jövő komputeralgebra-rendszereit vetítve ezzel előre.

**1. Szimbolikus vagy numerikus számítások?** Annak a ténynek, hogy a komputeralgebra-rendszerek tetszőleges pontosságú számítások elvégzésére képesek, van egy negatív oldala is: a használt saját (szoftveres) lebegőpontos aritmetika miatt a gépi pontosságot meghaladó numerikus műveletek százszor, ezerszer lassabbak lehetnek, mint más, beépített (hardveres) aritmetikát használó programok esetében. Ezért numerikus problémáknál mindig felvetődik a kérdés: valóban szükség van-e racionális számokkal történő egzakt vagy tetszőleges pontosságú lebegőpontos aritmetikára? Ellenkező esetben célszerűbb lehet valamely tradicionális programozási nyelv használata.

**2. Szintaxis és szemantika.** Ami a szintaxist és a szemantikát illeti, a szimbolikus nyelvek programozása nehezebb, mint a hagyományos numerikus nyelveké. Tengernyi beépített függvényt tartalmaznak, amelyeknek óvatlan használata váratlan eredményeket produkálhat. Sok esetben ezért nem árt, ha ismerjük a rendszerek és eljárásaik belső működését, az objektumok ábrázolásmódját; így jobban kordában tarthatjuk méretüket, elkerülhetjük a nemkívánt intermediate expression swell jelenséget. A szimbolikus nyelvek használata során elkövetett programozási hibák nyomkövetése szintén újszerű, nem minden esetben könnyű feladat.

**3. Memóriaigény és futási idő.** Általában nehéz megbecsülni az adott probléma megoldásához szükséges számítások idő- és tárkomplexitását. A legmegfelelőbb matematikai modell kiválasztása és hatékony programozása, a számítások optimalizálása nagy türelmet és szakértelmet kíván (de mindig megéri a fáradságot). Mindezekon kívül a szimbolikus számítások a numerikustól eltérő gondolkodásmódot igényelnek. Bizonyos esetekben ügyes változóhelyettesítéssel drasztikusan redukálhatjuk valamely algoritmus idő- és tárigényét, vagy éppen megoldást találhatunk egy olyan problémára, ami enélkül megoldhatatlannak tűnik.

**4. Kifejezések formátuma.** A szimbolikus rendszerek használata során gyakran vetődik fel a kérdés: mi az adott kifejezés legegyszerűbb alakja, hogyan érdemes azt egyszerűsíteni? Az  $(x-1)^2(x+1)^3(2x+3)^4$  kifejezés sokkal tömörebbnek és kifejezőbbnek tűnik, mint a  $16x^9 - 80x^8 + 88x^7 + 160x^6 - 359x^5 + x^4 + 390x^3 - 162x^2 - 135x + 81$  kifejezés, ez utóbbi viszont jobban használható, ha pl. az  $x^6$  együtthatójára vagyunk kíváncsiak. A kiterjesztett vagy faktorizált kifejezések problémájára két másik illusztris példa:

$$x^{1000} - 1 \text{ és } (x-1)(x^{999} + x^{998} + \dots + x + 1).$$

$$(x + 1)^{1000} \text{ és } x^{1000} + 1000x^{999} + \dots + 1000x + 1.$$

Az absztrakt objektumok képernyőn való megjelenítése pszichológiai problémákat feszeget: ámbár konverzióra mindig van lehetőség, nem minden esetben látszik előre, mi lesz az ember számára a legegyszerűbb, legjobban érthető forma. (Pl. egy- és többváltozós polinomok, tenzorok, gráfok stb.) Másrészt egy jól felépített rendszerben az input és output kifejezések formátuma nem térhet el nagyon a standard matematikai jelölésrendszertől.

**5. Tervezési kérdések.** Az egyik legfontosabb tervezési probléma az egyszerűsítések automatizálásának kérdése. A Maple például a  $0 * f(1)$  szorzatot automatikusan nullára egyszerűsíti, ami helytelen, ha  $f(1)$  nem definiált vagy végtelen. A tervezőknek egyensúlyt kell találniuk a matematikai korrektség és a használhatóság, hatékonyság között.

**6. Típusok.** Ahhoz, hogy az ábrázolt objektumoknak a pontos jelentését ismerjük, tudnunk kell, hogy milyen értelmezési tartományhoz tartoznak. Ezt nevezzük az objektum típusának. A típus azonban nem mindig egyértelmű. A 29 szám nemcsak egész, de nemnegatív sőt pozitív egész. Általában a felhasználó nem akarja minden lépésnél explicit módon meghatározni a használt objektumok típusát, a rendszernek kell ezt megtennie, amennyire ez lehetséges. A típust nem mindig lehet automatikusan felismerni. Amikor a típus már valamilyen módon meghatározott, a megfelelő műveletek alkalmazhatók. Például a rendszer felismeri, hogy lánctört-együtthatós polinomok szorzása kommutatív, mátrix együtthatós polinomoké viszont nem. Ily módon a megfelelő tartományok hierarchiája építhető fel, ahogy ezt az Axiom nyelv készítői tették.

**7. Automatikus következtetés.** Tekintsük az alábbi, Axiom szintaxisban megadott szabályokat:

```
sinCosProducts == rule
  sin(x) * sin(y) == (cos(x-y) - cos(x+y))/2
  cos(x) * cos(y) == (cos(x-y) + cos(x+y))/2
  sin(x) * cos(y) == (sin(x-y) + sin(x+y))/2
```

A szabályok bal oldalát mintának, a jobb oldalát a helyettesítésének nevezzük. Amikor egy szabályt alkalmazunk, egy ún. mintaillesztő eljárás végigpásztázza az argumentumok részkifejezéseit, és az első illeszkedő mintát helyettesíti a szabály jobb oldalán lévő kifejezéssel. Ez a paradigma nagyon hasznos és fontos például kifejezések különböző formái közötti transzformációk végrehajtása során. Adott szabályrendszer esetén a szabályok egymás utáni alkalmazásakor természetesen vetődik fel a terminálás kérdése. Ebben az általánosságban azonban ez egy eldönthetetlen probléma (a Turing-gépek megállási problémája visszavezethető a terminálás problémájára). Bizonyos esetekben a Knuth-Bendix-féle eljárás ([40]) alkalmazható, de olyan eset is lehetséges, amikor bizonyíthatóan nem konstruálható olyan teljes rendszer, amely az adott szabályhalmazzal ekvivalens lenne. Szorosan idekapcsolódó kérdéskör az automatikus következtetés és tételbizonyítás problémaköre. Az eddigi biztató eredmények ellenére hosszú még az út az automatikus tételbizonyítók

mindennapos használatáig. Mindezek ellenére ezen sorok írója meggyőződéssel hiszi, hogy a jövő komputeralgebra-rendszerei képesek lesznek tanulásra, interaktív működésük alatt funkcionalitásuk változtatására, tételbizonyításra, egyszerűen mindarra, amit ma mesterséges intelligenciának nevezünk.

**8. Megoldhatóság.** A komputeralgebra-rendszerekben felhalmozott hatalmas ismeretanyag ellenére tisztában kell lennünk azzal, hogy a matematikának sok olyan területe van még, ahol a mai rendszerek nem sok segítséget tudnak nyújtani vagy a hatékony algoritmusok hiánya vagy egész egyszerűen a megfelelő megoldási módszerek ismeretének hiánya miatt. Ilyen, a kutatások élvonalába tartozó területek pl. a parciális differenciálegyenletek, a nem elemi (pl. Bessel-féle) függvényeket tartalmazó határozatlan és határozott integrálok, felületi integrálok, nemkommutatív algebrák stb. Léteznek olyan problémák is, amelyekre bizonyítható, hogy nem létezik egzakt szimbolikus megoldás. Tekintsük például a transzcendens kifejezések azon TK osztályát, amelyek egy  $x$  változóból, racionális konstansokból, a transzcendens konstans  $\pi$ -ből, és a  $+$ ,  $*$ ,  $\sin$ ,  $\exp$  függvénytípusokból épülnek fel. Két kifejezés pontosan akkor ekvivalens, ha  $\mathbb{R}$ -en ugyanazt a függvényt írják le. Richardson és Matijasevic Hilbert 10. problémájának eldönthetlenségére adott bizonyítását alapulvéve Caviness bizonyította be, hogy a TK osztálybeli kifejezések ekvivalenciaproblémája eldönthetetlen [11].

**9. Implementáció.** Egy adott algoritmushoz tartozó legjobb implementációt megtalálni nem minden esetben könnyű vállalkozás. Az objektumok adatábrázolásától, a választott programnyelv lehetőségeitől függően több "legjobb" implementáció is lehetséges. Ezenkívül a különféle speciális esetek gyakran különböző megközelítési módot igényelnek. A használhatóságot tekintve az informatika legújabb eredményeinek alkalmazása megkönnyítheti az egyensúlyozást a hatékony kód és a kényelmes használat között.

**10. Párhuzamosítás.** A parallelizálás irányába történt erőfeszítések várhatólag előbb-utóbb meghozzák gyümölcsüket. Az eddigi eredmények ígéretesek.

**11. Modulok és könyvtárak.** Ma már a komputeralgebra-rendszerek lényegesen nyitottabbak, vagyis az egyik rendszerből meghívható több másik szimbolikus vagy numerikus nyelven megírt programrészlet. Ezeket a programegységeket (modulokat) a felhasználói felületen keresztül interaktívan csatolhatjuk. A modul-könyvtárak közös használatához a be- és kimenetet szabványosítani kell. Ennek egy megoldásán dolgozik az OpenMath tervezet [52].

**12. Felhasználói felület.** A legtöbb általános célú komputeralgebra-rendszer rendelkezik valamilyen grafikus felülettel. Ami pedig fejlődésüket illeti, véleményem szerint folytatódni fog az a napjainkban is érzékelhető pozitív tendencia, ami elvezet a szabványos elemekből építkező (ábra, szöveg, formula, stb), dokumentumkészítésre alkalmas, internet- és hypertext-lehetőséggel felvértezett univerzális programcsomagokhoz.

A fejezetben látott hiányosságok ellenére a komputeralgebra-rendszerek nagyon



gyakran szolgálnak kellemes meglepetésekkel, tudásuknál fogva, valamint interdiszciplináris természetükből adódóan reményteljes és sokatígérő jövő előtt állnak. Megjelenésükkel új módszerek, új eszközök léptek színre, amelyek fokozatosan megváltoztatják gondolkodásmódunkat, modellalkotó képességünket. Segítségükkel a problémák új megvilágításba kerülnek, a természettudományi és matematikai törvények egyre apróbb és apróbb részletei kristályosodnak ki, ezáltal újabb és újabb felfedezéseket tehetünk a csodák — a matematikai struktúrák univerzumában.

## 6. Irodalmi összefoglaló

A komputeralgebráról és a kapcsolódó tudományterületekről számos publikáció és könyv született. Az érdeklődőknek sorolunk fel az összefoglaló matematikai jellegű munkák közülük néhányat: Caviness [10], Davenport et al. [17], Geddes et al. [21], Knuth [37], Mignotte [47], Mishra [48], Pavelle et al. [53], Winkler [61].

További információk lephetők a komputeralgebra informatikai oldaláról az alábbiakban:

Buchberger [6], Christensen [14], Gonnet és Gruntz [23], Harper et al. [27], Miola [50] valamint a világhálózaton, pl. [63].

Az alkalmazásokról könyvek és cikkek nagyon széles választéka áll rendelkezésre, pl. Akritas [2], Cohen et al. (ed.) [15, 16], Grossman (ed.) [26], Hearn (ed.) [29] és Odlyzko [50].

A komputeralgebra-rendszerek oktatásban betöltött szerepéről lásd pl. Karian [35] és Uhl [59] munkáját.

Ajánlott konferenciakiadványok: AAEECC, DISCO, EUROCAL, EUROSAM, ISSAC és SYMSAC.

Komputeralgebrai folyóiratok: *Journal of Symbolic Computation (JSC)* - Academic Press, *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing (AAEECC)* - Springer-Verlag, *SIGSAM Bulletin* - ACM Press.

## IRODALOM

- [1] S.A. ABROMOV, K. KVASHENKO, „Fast Algorithms to Search for the Rational Solutions of Linear Differential Equations with Polynomial Coefficients”, *Proceedings of ISSAC '91*, 267-270. ACM Press, 1990..
- [2] A.G. AKRITAS, „Elements of computer algebra with applications”, Wiley, New York, 1989..
- [3] D. BARTON AND J.P. FITCH, „Camal: The Cambridge Algebra System”, *SIGSAM Bull.* **8(3)**, 17-23.
- [4] C. BATUT, D. BERNARDI, H. COHEN AND M. OLIVER, „User's Guide to Pari-GP, version 1.39.”, *Université Bordeaux I*.
- [5] M. BRONSTEIN, „Linear Ordinary Differential Equations: breaking through the order 2 barrier”, *Proceeding of ISSAC '92*, 42-48. ACM Press, 1992..
- [6] B. BUCHBERGER, G.E. COLLINS, M. ENCARNACIÓN, H. HONG, J. JOHNSON, W. KRANDICK, R. LOOS, A. MANDACHE, A. NEUBACHER, H. VIELHABER, „SACLIB 1.1 user's guide”, *Techn. Rep. RISC Linz*, 93-19.
- [7] G. BUTLER AND J. CANNON, „The Design of Cayley - A Language for Modern Algebra”, *Design and Implementation of Symbolic Computation Systems*, Lecture Notes in Computer Science 429, 10-19, Springer-Verlag, 1990..

- [8] J. CANNON AND W. BOSMA, „Cayley Quick Reference Guide”, Univ of Sydney, 1991..
- [9] A. CAPANI AND G. NIESI, „CoCoA User's Manual”, Univ. of Genova, CoCoA version 3.0b, 1995..
- [10] B.F. CAVINESS, „Computer algebra: past and future”, *J. Symb. Comput.* **2**, 217–263.
- [11] B.F. CAVINESS, R.J. FATEMAN, „Simplification of radical expressions”, Proc. 1976 ACM Symp. on Symbolic and Algebraic Comp. (ed. R.D. Jenks), ACM Press, New York, 1976, 329–338..
- [12] B.W. CHAR, K.O. GEDDES ET AL., „Maple V Library Reference Manual”, Springer-Verlag, 1991..
- [13] B.W. CHAR, K.O. GEDDES ET AL., „Maple V Language Reference Manual.”, Springer-Verlag, 1991..
- [14] B.W. CHAR, K.O. GEDDES ET AL., „First Leaves: A Tutorial Introduction.”, Springer-Verlag, 1992..
- [15] S.M. CHRISTENSEN, „Resources for Computer Algebra”, *Computers in Physics* **8**, 308–315.
- [16] A.M. COHEN ET AL. (ED.), „Computer Algebra for Industry: Problem Solving in Practice”, John Wiley & Sons, 1993..
- [17] A.M. COHEN ET AL. (ED.), „Computer Algebra for Industry 2: Problem Solving in Practice”, John Wiley & Sons, 1995..
- [18] J.H. DAVENPORT, Y. SIRET, E. TOURNIER, „Computer Algebra: systems and algorithms for algebraic computation”, Academic Press, 1988..
- [19] I. FRICK, „Sheep User's Manual”, Univ. of Stockholm, 1977..
- [20] FUCHSTEINER ET AL., „MuPAD: Multi Processing Algebra Data Tool; Benutzerhandbuch; MuPAD Version 1.1.”, Birkhäuser Verlag, 1993..
- [21] FUCHSTEINER ET AL., „MuPAD: Multi Processing Algebra Data Tool; Tutorial”, Birkhäuser Verlag, 1993..
- [22] K.O. GEDDES, S.R. CZAPOR, G. LABAHN, „Algorithms for Computer Algebra”, Kluwer Academic Publishers, 1992..
- [23] A. GIOVINI AND G. NIESI, „CoCoA: A User-Friendly System for Commutative Algebra”, Design and Implementation of Symbolic Computation Systems, Lecture Notes in Computer Science 429, 20–29. Springer-Verlag, 1990..
- [24] G.H. GONNET, D.W. GRUNTZ, „Algebraic manipulation: systems”, Encyclopedia of computer science, 3rd edn., Van Nostrand Reinhold, New York, 1993..
- [25] J. GRAF V. SCHMETTOW, „Kant - a Tool for Computations in Algebraic Number Fields”, *Computational Number Theory* **321–330**.
- [26] J.W. GRAY, „Mastering Mathematica (Programming Methods and Applications)”, Academic Press Professional New York, Boston, 1994..
- [27] D.R. GRAYSON, „Macaulay 2.”, <http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2>, 1995..
- [28] R. GROSSMAN (ED.), „Symbolic Computation: Applications to Scientific Computing”, Frontiers in Applied Mathematics, 5, Soc. for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1989..
- [29] D. HARPER, C. WOOFF, D. HODGINSON, „A guide to computer algebra systems”, Wiley, Chichester, 1991..
- [30] A.C. HEARN, „Reduce User's Manual”, The Rand Corporation, Santa Monica, California, 1987..
- [31] A.C. HEARN, ANN BOYLE, B.F. CAVINESS, „Future Directions for Research in Symbolic Computation”, SIAM Reports on Issues in the Mathematical Sciences, Philadelphia, 1990..
- [32] A. HECK, „Introduction to Maple”, 2. ed. Springer-Verlag, 1996..
- [33] MARK VON HOEIJ, „Factorization of Linear Differencial Operators”, Ph.D. thesis, Univ. of Nijmegen, 1996..
- [34] C. HOLLINGER AND P.SERF, „Simath — a Computer Algebra System”, *Computation Number Theory* **331–342**.
- [35] L. HORNFELDT, „Stensor Reference Manual”, Univ. of Stockholm, 1988..

- [36] R.D. JENKS AND R.S. SUTOR, „Axiom, The Scientific Computation System”, Springer-Verlag, 1992..
- [37] Z.A. KARIAN (ED.), „Symbolic computation in undergraduate mathematics education”, *Math. Assoc. Amer. Notes* **24**.
- [38] KLINCSIK M., MARÓTI GY., „Maple 8 tételben”, Novodat, Szeged, 1995..
- [39] D.E. KNUTH, „A számítógépprogramozás művészete, 2. kötet, Szeminumerikus algoritmusok”, Műszaki Kiadó, Budapest, 1987..
- [40] D.E. KNUTH, P. BENDIX, „Simple Word Problems in Universal Algebras”, *Computational Problems in Abstract Algebra* (ed. by J. Leech), 263–279. Pergamon Press, 1970..
- [41] J. KOVACIC, „An Algorithm for Solving Second Order Homogeneous Differential Equations”, *J. Symbolic Computation* **2**, 3–43.
- [42] KOVÁCS A., „Sets of Complex Numbers generated by a Polynomial Functional Equation”, *Annales Univ. Sci. Bud. Sect. Comp., megj. alatt..*
- [43] KOVÁCS A., B.M. PHONG, „On completely additive functions satisfying a congruence”, *Acta Sci. Math., elbírálás alatt..*
- [44] M.A. VAN LEEUWEN, A.M. COHEN, B. LISSER, „LiE: A Package for Lie Group Computations”, CAN Expertise Center, 1992..
- [45] M. MACCALLUM AND J. SKEA, „Sheep, a computer algebra system for general relativity”, *Algebraic Computing in General Relativity*, 1–172. Clarendon Press, 1994..
- [46] M. MACCALLUM, F. WRIGHT, „Algebraic computing with Reduce”, Clarendon, Oxford, 1991..
- [47] „Macsyma User’s Guide, System Reference Manual, Mathematics Reference Manual”, Macsyma Inc., 1992..
- [48] R. MAEDER, „Programming in Mathematica”, 2nd. edn., Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1991..
- [49] M. MIGNOTTE, „Mathematics for Computer Algebra”, Springer-Verlag, 1992..
- [50] A. MIOLA (ED.), „Design and implementation of symbolic computation systems”, *Lecture Notes in Computer Science*, 722., Springer, New York, 1993..
- [51] B. MISHRA, „Algorithmic Algebra”, Springer-Verlag, 1993..
- [52] MOLNÁRKA GY., GERGÓ L., WETTL F., HORVÁTH A., KALLÓS G., „A MapleV és alkalmazásai”, Springer Hungarica Kft., Budapest, 1996..
- [53] A.M. ODLYZKO, „Applications of symbolic mathematics to mathematics”, *Applications of Computer Algebra*, Kluwer Academic Press, Boston, 1985..
- [54] G.J. OLDENBORGH, „An Introduction to Form”, Univ. of Leiden, <http://www.can.nl/SystemsOverview/General/Form/>..
- [55] <http://www.can.nl/~abbott/OpenMath..>
- [56] R. PAVELLE, M. ROTHSTEIN, J. FITCH, „Computer Algebra”, *Scientific American* **245**, 102–113.
- [57] M. SCHOENERT ET AL., „GAP: Groups, Algorithms and Programming”, RWTH Aachen, 1994. GAP Manual Release 3.4, <http://www.math.rwth-aachen.de/GAP/Manual/>..
- [58] SZILI L. ÉS TÓTH J., „Matematika és Mathematica”, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1996..
- [59] M. STILLMAN, D.BAYER, „Macaulay User Manual”, 1989..
- [60] D. STOUTEMEYER, „Derive User Manual”, Soft Warehouse Inc., Honolulu, Hawaii, 1994..
- [61] H.STRUBBE, „Manual for Schoonship”, *Comput. Phys. Commun* **8**, 1–30.
- [62] J.J. UHL, „Mathematica and me”, *Notices AMS* **35**.
- [63] J.A.M. VERMASEREN, „Symbolic Manipulation with Form”, CAN Expertise Center, 1991..
- [64] F. WINKLER, „Polynomial Algorithms in Computer Algebra”, Springer-Verlag, 1996..
- [65] S. WOLFRAM, „Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer”, Addison-Wesley, 1991..

[66] Computer Algebra Web Servers: [www.can.nl](http://www.can.nl), [www.uni-karlsruhe.de](http://www.uni-karlsruhe.de), [info.risc.uni-linz.ac.at](mailto:info.risc.uni-linz.ac.at), [medicis.polytechnique.fr](mailto:medicis.polytechnique.fr), [symbolicnet.mcs.kent.edu..](mailto:symbolicnet.mcs.kent.edu..)

(Beérkezett: 1997. szeptember 25.)

MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA  
SZÁMELMÉLETI KUTATÓCSOPORT  
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
KOMPUTER ALGEBRA TANSZÉK  
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6-8.  
E-MAIL: ATTILA@COMPALG.ELTE.HU

## COMPUTER ALGEBRA IN SCIENCE AND PRACTICE

A. KOVÁCS

Computer algebra systems have outstanding significance in up-to-date science and engineering. These systems are able to handle symbolical and numerical computations providing a powerful help to increase scientific and engineering productivity. The present paper deals with the results achieved in this field. Applications and future directions as well as references to the appropriate topics are also included.

## AZ ASSEMBLÁLÁS ELMÉLETE

CSÖRNYEI ZOLTÁN

Budapest

Az assembler alapvető feladata az, hogy értéket adjon az assembly nyelvű program szimbólumainak. Az assembler a kódgenerálás lépésében a tárgyprogramot ezekből az értékekből állítja össze. Ezt az értéktárolási folyamatot vizsgáljuk, a szimbólumok értékét a menetszám, majd a posztdefinitási fok függvényében adjuk meg, és meghatározzuk, hogy egy assembly nyelvű program fordításához hány menet szükséges.

### 1. Bevezetés

Az assembler az assembly nyelvű programból tárgyprogramot és listát készít. Az assembly nyelvű program szimbólumok sorozata, az assembler a fordítás folyamán ezekhez a szimbólumokhoz értéket rendel, és ezekből az értékekből állítja össze a tárgyprogramot és ezek az értékek szerepelnek a listában is.

Először egy assembly nyelvet definiálunk, kiemelve az assembly nyelvek közös tulajdonságait [1], [2], [6]–[10]. A programban elfoglalt helyüktől függően osztályozzuk a szimbólumokat, és a szintaktikusan helyes assembly nyelvű program szimbólumokra vonatkozó tulajdonságait axiómákkal adjuk meg. Kimondjuk az assemblálás alapaxiómáját [11], majd a szimbólumosztályokra megadjuk a szimbólumok értékének definícióját. Bevezetjük a menet fogalmát, majd a posztdefinitási fok [3], [5] felhasználásával meghatározzuk, hogy egy szimbólum melyik menetben kap értéket.

Végül megadjuk, hogy a program posztdefinitási fokától függően a program fordításához hány menet szükséges [4].

### 2. Az assembly nyelv

Az assembly nyelv vizsgálatához először definiálunk egy egyszerű környezetfüggetlen

grammatikát. A  $G$  grammatika első néhány helyettesítési szabályát adjuk csak meg:

- $$\begin{aligned}
 (1) \quad & \langle \text{program} \rangle \rightarrow \langle \text{line} \rangle \underline{\text{eol}} \mid \\
 & \qquad \qquad \qquad \langle \text{program} \rangle \langle \text{line} \rangle \underline{\text{eol}} \\
 (2) \quad & \langle \text{line} \rangle \rightarrow \langle \text{symb} \rangle = \langle \text{expr} \rangle \mid \\
 & \qquad \qquad \qquad \langle \text{stmt} \rangle \\
 (3) \quad & \langle \text{stmt} \rangle \rightarrow \langle \text{symb} \rangle : \langle \text{stmt} \rangle \mid \\
 & \qquad \qquad \qquad \langle \text{mnem} \rangle \mid \\
 & \qquad \qquad \qquad \langle \text{mnem} \rangle \langle \text{opnd} \rangle \\
 (4) \quad & \langle \text{opnd} \rangle \rightarrow \langle \text{expr} \rangle \mid \\
 & \qquad \qquad \qquad \langle \text{opnd} \rangle, \langle \text{expr} \rangle \\
 (5) \quad & \langle \text{mnem} \rangle \rightarrow \text{ADD} \mid \text{MOV} \mid \dots \\
 & \dots \qquad \qquad \dots
 \end{aligned}$$

Egy  $P$  assembly nyelvű program a  $G$  által meghatározott nyelv egy mondata. A fenti szabályokból látható, hogy az assembly nyelvű program egysége a sor, és hogy egy sor három zónára bontható: címke-, utasítás- és operanduszónára. Egy sor utasítászónája vagy az  $=$  direktívát, azaz egy assemblernek szóló parancsot, vagy egy *mnemonikot*, azaz egy végrehajtható, gépi kódú utasítás szimbólikus nevét tartalmazza.

Egészítsük ki a program sorait egy nulladik zónával, a sorszám zónával. Így az assembly nyelvű program  $k$ -ik sora a következő felépítésű:

(0)	(1)	(2)	(3)
$k$	<i>címke</i>	<i>utasítás</i>	<i>operandus</i>

A grammatika (3) szabályával egy mnemonikot tartalmazó sor címkezónájában több szimbólumot is meg lehet adni:

$$szimb_1 : szimb_2 : \dots szimb_m : \text{mnemonik} \quad \text{operandus} \underline{\text{eol}}$$

Ezekhez a szimbólumokhoz az assembler az *elhelyezésszámláló* aktuális értékét rendeli. Az elhelyezésszámláló egy, az assembler által definiált változó, jelöljük ezt a változót a  $\$$  jellel. Ezt felhasználva alakítsuk át a szimbólumot tartalmazó sorokat a következő formára:

$$\begin{aligned}
 szimb_1 &= \$ \underline{\text{eol}} \\
 szimb_2 &= \$ \underline{\text{eol}} \\
 &\dots \\
 szimb_m &= \$ \underline{\text{eol}} \\
 &\quad \text{mnemonik} \quad \text{operandus} \quad \underline{\text{eol}}
 \end{aligned}$$

Az átalakítás után tehát egy program a következő típusú sorokból áll:

(0)	(1)	(2)	(3)
$k$		<i>utasítás</i>	<i>operandus</i>
$k$		<i>utasítás</i>	
$k$	<i>szimbólum</i>	=	<i>operandus</i>

Jelöljük a program  $k$ -ik sorának (1), (2) és (3)-ik zónájában levő szimbólumokat rendre  $a(k)$ ,  $m(k)$  és  $u(k)$ -val, a program hosszát pedig jelöljük  $|P|$ -vel, azaz  $\max k = |P|$ . Most definiáljuk a szimbólumok halmazait.

**2.1. Definíció.** Legyen  $A(0) = \{\$ \}$ ,  $A(k) = A(k-1) \cup a(k)$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ), és  $A = A(|P|)$ . Az  $A$  halmazt a  $P$  program *paraméterhalmazának* nevezzük.

Megjegyezzük, hogy mivel a  $\$$  szimbólum az assembler által definiált változó,  $\$ \notin a(k)$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ).

Azokat az  $a \in A$  paramétereket, amelyek a

(0)	(1)	(2)	(3)
$k$	$a$	=	$\$$

alakú sorok címkezőzónájában szerepelnek, a továbbiakban *címkekének* nevezzük, és jelöljük a  $k$ -ik sor címkejét  $b(k)$ -val, azaz legyen

$$b(k) = \{a(k) \mid m(k) = \{=\} \wedge u(k) = \{\$\}\}$$

A címkek halmaza a következő:

**2.2. Definíció.** Legyen  $B(0) = \emptyset$ ,  $B(k) = B(k-1) \cup b(k)$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ), és  $B = B(|P|)$ . A  $B$  halmazt a  $P$  program *címkehalmazának* nevezzük.

Az assembly nyelvű programban a címkeknek egyedi címkeknek kell lenniük, azaz egy címke nem szerepelhet a program több sorának címkezőzónájában. Ezt a tulajdonságot mondja ki a következő axióma.

I. AXIÓMA.  $b(k) \notin B(k-1)$ ,  $1 \leq k \leq |P|$

Ha az axiómában kimondott állítás egy címkére nem teljesül, akkor az assembler a címke minden előfordulása esetén egy *"többszörösen definiált szimbólum"* hibajelzést ad.

Az utasítászónában *direktívák* vagy *mnemonikok* találhatók. Az utasítászónába írt = jel az assembler számára egy direktíva.

**2.3. Definíció.** Legyen  $M(0) = \emptyset$ ,  $M(k) = M(k-1) \cup m(k)$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ), és  $M = M(|P|)$ . Az  $M$  halmazt a  $P$  program *utasításszimbólum halmazának* nevezzük.

Az utasítászónába csak egy előre megadott  $\mathcal{M}$  halmaz elemei írhatók, az  $\mathcal{M}$  halmazt az assembly nyelv *utasításkészletének* nevezzük. Az  $\mathcal{M}$  halmaz elemeit csak az utasítászónába szabad írni, a halmaz elemei sem a címkezőzónában, sem az operanduszónában nem fordulhatnak elő. Ezeket a követelményeket a következő axiómák mondják ki:

II. AXIÓMA.  $M \subseteq \mathcal{M}$

III. AXIÓMA.  $A \cap M = \emptyset$ 

Az operanduszónában található szimbólumok a következőképpen adhatók meg:

2.4. *Definíció.* Legyen  $U(0) = \emptyset$ ,  $U(k) = U(k-1) \cup u(k)$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ), és  $U = U(|P|)$ . Az  $U$  halmazt a  $P$  program *operandusszimbólum halmazának* nevezzük.

Az operanduszónában található  $u(k)$  szimbólumok között lehetnek konstansok és operátorok is, jelöljük ezen szimbólumokat  $u_C(k)$  és  $u_O(k)$ -val, a  $P$  program konstans és operátor szimbólumait pedig  $U_C$ ,  $U_O$ -val.

Az utasításokhoz hasonlóan, az operátorok is csak egy előre megadott  $\mathcal{O}$  halmaz elemei lehetnek. Az operátorok nem írhatók a címkezőnába vagy az utasítászőnába, és az alfabetikus vagy numerikus karakterekből álló konstansokat is csak az operanduszónába szabad írni:

IV. AXIÓMA.  $U_O \subseteq \mathcal{O}$ V. AXIÓMA.  $U_O \cap A = \emptyset$  &  $U_O \cap M = \emptyset$ , és  $U_C \cap A = \emptyset$  &  $U_C \cap M = \emptyset$ 

Az operanduszónában található nem konstans és nem operátor szimbólumokat a címkezőnában kell definiálni, azaz ha

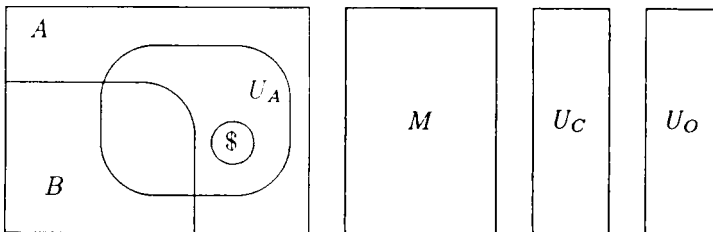
$$U_A = U \setminus (U_C \cup U_O),$$

akkor az  $U_A$  minden elemének paraméternek kell lennie. Ezt mondja ki az assemblálás alapaxiómája.

VI. AXIÓMA. (AZ ASSEMBLÁLÁS ALAPAXIÓMÁJA).  $U_A \subseteq A$ 

Legyen  $u_A(k) = u(k) \setminus (u_C(k) \cup u_O(k))$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ). Ha egy  $s \in u_A(k)$  szimbólumra a fenti axióma nem teljesül, akkor az assembler a  $k$ -ik sorban az  $s$  szimbólumra *"ismeretlen szimbólum"* hibajelzést ad.

Egy assembly nyelvű program szimbólumainak halmazai az 1. ábrán láthatók.



1. ábra: A szimbólumhalmazok



### 3. A szimbólumok értéke

Most megvizsgáljuk, hogy az előzőekben definiált szimbólumhalmazok elemeihez az assembler milyen értékeket rendel. Az assembler az assembly nyelvű programot a nulladik zónában levő sorszám szerint növekvő sorrendben, *soronként* fordítja. Jelölje az  $s$  szimbólum értékét a program  $k$ -ik sorában  $val(s, k)$ , és ha az assembler ezt az értéket nem tudja meghatározni, akkor legyen  $val(s, k) = \epsilon$ .

VII. AXIÓMA. Minden  $s \in U_C \cup M$  és minden  $1 \leq k \leq |P|$ -re  $val(s, k) \neq \epsilon$ , és minden  $1 \leq k, l \leq |P|$ -re  $val(s, k) = val(s, l)$ .

A fenti axióma azt mondja ki, hogy a konstansok értéke egyértelműen meghatározható, és ez az érték független attól, hogy a konstans a programnak melyik sorában található. Az axióma alapján ugyanez igaz a mnemonikokra is, azaz az utasításkódokhoz rendelt gépi kód független a programtól.

Ezek után már csak az  $A$  és az  $U_O$  halmaz elemeivel kell foglalkoznunk. Mivel  $\$ \in A$ , először vizsgáljuk ennek a szimbólumnak az értékét.

3.1. *Definíció.* Legyen  $val(\$, 1) = 0$ , és legyen  $k \geq 2$ -re

$$val(\$, k) = val(\$, k-1) + f(m(k-1), u(k-1))$$

ahol az  $f(m, u)$  az utasítás hosszát megadó nemnegatív egész értékű függvény, értéke minden  $m(k-1) \subseteq M$  és  $u(k-1) \subseteq U$ -ra előre adott, még abban az esetben is, ha valamely  $s \in u(k-1)$ -re  $val(s, k-1) = \epsilon$ .

A definíció szerint az elhelyezésszámláló értéke a program első sorának fordításakor mindig nulla, és a további sorok fordításakor nem csökkenhet. A növekedés értékét csak az utasításkód és az operanduszónában található szimbólumok, és nem ezen szimbólumok értékei határozzák meg.

Legyen  $A' = A \setminus \{\$\}$ ,  $U'_A = U_A \setminus \{\$\}$ , és legyen

$$u'_A(k) = \begin{cases} u_A(k) & \text{ha } \$ \notin u_A(k) \\ u_A(k) \setminus \{\$\} & \text{ha } \$ \in u_A(k) \end{cases}$$

A továbbiakban csak az  $A'$  halmaz elemeinek értékadásával foglalkozunk.

Láttuk, hogy ha az  $s \in A'$  szimbólum a

(0)	(1)	(2)	(3)
$k$	$s$	$=$	$expr$

típusú utasítások (1) zónájában szerepel, azaz ha a címkezőna nem üres, akkor az operanduszónában csak egy kifejezés állhat. Az  $=$  direktíva az értékadást jelenti, ezért először egy operanduszónában álló  $expr$  kifejezés értékét adjuk meg.

Azt mondjuk, hogy egy  $expr$  kifejezésre  $val(expr, k) \neq \epsilon$ , ha benne  $u'_A(k) = \emptyset$ , vagy ha benne minden  $u'_A(k)$ -beli szimbólumnak az értéke ismert. Ekkor

$$\text{val}(\text{expr}, k) = \times_{u_O(k)} \text{val}(s, k)$$

ahol  $s \in u_A(k) \cup u_C(k)$ , és  $\times$  a kifejezésben levő  $u_O(k)$  műveletek elvégzését jelenti. Ha az  $\text{expr}$  kifejezésre  $u'_A(k) = \emptyset$ , akkor  $\text{val}(\text{expr}, k) \neq \varepsilon$ , hiszen az  $\text{expr}$  kifejezés legfeljebb csak a  $\$$  szimbólumot, konstansokat és operátorokat tartalmazhat, és a  $\$$  szimbólum értéke a 3.1. definíció szerint, a konstansok értéke a VII. axióma szerint  $\neq \varepsilon$ .

Az assembler a címkezőnőben álló szimbólumhoz az operanduszónőben álló kifejezés értékét rendeli. Egy  $s$  szimbólum azonban ugyanazon sor címke- és operanduszónőjében is előfordulhat:

(0)	(1)	(2)	(3)
$k$	$s$	$=$	$s + 1$

és ebből azonnal látható, hogy a szimbólum értéke a két zónában nem lesz azonos. Ezért meg kell különböztetnünk a különböző zónában felvett értékeket. A továbbiakban jelöljük az  $s$  szimbólum értékét a program  $k$ -ik sorának  $j$ -ik zónájában  $\text{val}(s, k^{(j)})$ -vel.

Természetesen, mivel  $\$ \notin a(k)$  ( $1 \leq k \leq |P|$ ), a  $\text{val}(\$, k^{(1)})$ -et nem értelmezzük, és  $\text{val}(\$, k^{(3)}) = \text{val}(\$, k)$  minden  $1 \leq k \leq |P|$ -re.

Ha  $s \in a(k)$ , akkor legyen  $\text{val}(s, k^{(1)}) = \text{val}(\text{expr}, k)$ , azaz a címkezőnőben szereplő szimbólum értéke legyen az operanduszónőben adott kifejezés értékével egyenlő. Megjegyezzük, hogy a fentiek szerint, ha  $u'_A(k) = \emptyset$ , akkor  $\text{val}(s, k^{(1)}) \neq \varepsilon$ . Ha  $\text{val}(\text{expr}, k) = \varepsilon$ , akkor az  $s$  szimbólum értéke is ismeretlen, azaz  $\text{val}(s, k^{(1)}) = \varepsilon$ .

Mivel egy szimbólum több programsor címkezőnőjében is szerepelhet, definiáljuk a szimbólumok hatáskörét.

**3.2. Definíció.** Ha  $s \in a(k_1)$ ,  $s \in a(k_2)$ , ...,  $s \in a(k_m)$ , ahol  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq |P|$ , akkor a  $k_i$ -ik sor címkezőnőjében szereplő  $s$  szimbólum hatásköre legyen

$$E(s, k_i) = \{ (k_i + 1)^{(3)}, (k_i + 2)^{(3)}, \dots, k_{i+1}^{(3)} \}, \text{ ha } i \neq m, \text{ és}$$

$$E(s, k_m) = \{ 1^{(3)}, 2^{(3)}, \dots, k_1^{(3)}, (k_m + 1)^{(3)}, \dots, |P|^{(3)} \}.$$

Megjegyezzük, hogy  $s \in b(k)$  esetén az I. axióma szerint

$$E(s, k) = \{ 1^{(3)}, 2^{(3)}, \dots, |P|^{(3)} \}.$$

A definíció szerint az  $s$  szimbólum hatáskörei diszjunkt halmazok, és ha  $s \in u'_A(l)$ , akkor egyértelműen megadható egy  $k_i$  ( $1 \leq k_i \leq |P|$ ),  $1 \leq i \leq m$ ) úgy, hogy  $l^{(3)} \in E(s, k_i)$ .

A szimbólumok értékének meghatározásakor alapvető tulajdonság a szimbólumok pre- és posztdefiníciója, ezért most ezeket a fogalmakat definiáljuk.

**3.3. Definíció.** Ha  $s \in a(k)$ , és  $l^{(3)} \in E(s, k)$ , akkor az  $s$  szimbólumot az  $l^{(3)}$ -ban  $k < l$  esetén *predefinit*,  $k \geq l$  esetén pedig *postdefinit* szimbólumnak nevezzük.

Ha  $s \in a(k_1)$ ,  $s \in a(k_2)$ , ...,  $s \in a(k_m)$ , akkor az  $s$  szimbólum az  $1^{(3)}, 2^{(3)}, \dots, k_1^{(3)}$  zónákban posztdefinit, a  $(k_1 + 1)^{(3)}, \dots, |P|^{(3)}$  zónákban pedig predefinit szimbólum lesz.

Hasonlóan, ha  $s \in b(k)$ , akkor az  $s$  címke az  $1^{(3)}, 2^{(3)}, \dots, k^{(3)}$  zónákban posztdefinit, a  $(k+1)^{(3)}, \dots, |P|^{(3)}$  zónákban pedig predefinit szimbólum.

Az assembly nyelvű program sorainak egyszeri soronkénti feldolgozásával nem minden szimbólum értéke határozható meg. Az utolsó példából, amelyben az  $s$  szimbólum a címkezőnában és az operanduszónában is szerepelt, nem csak az látható, hogy egy szimbólum értéke különböző zónákban különböző lehet, hanem az is, hogy egy szimbólum értéke minden újrafeldolgozáskor megváltozhat. Az assembly nyelvű program egyszeri soronkénti végigolvasását, feldolgozását *menetnek* nevezzük, így beszélhetünk egy-, két- vagy többmenetes assemblerről.

Jelöljük  $val^{(i)}(s, k^{(j)})$ -vel az  $s$  szimbólum értékét az  $i$ -ik menetben, a program  $k$ -ik sorának  $j$ -ik zónájában. Ez az értékfogalom a  $val(s, k^{(j)})$  általánosítása.

A  $\$$  szimbólum értéke minden  $i \geq 1$ -re legyen a 3.1. definícióban megadott érték:

$$val^{(i)}(\$, k^{(3)}) = val(\$, k) \quad (1 \leq k \leq |P|).$$

A program fordításának kezdetekor minden nem  $\$$  paraméter értéke ismeretlen, azaz minden  $s \in A'$ -re

$$val^{(1)}(s, 1^{(3)}) = \varepsilon,$$

és  $s$  értéket csak az első olyan sorban kaphat, amelyben a címkezőnában szerepel.

Tegyük fel, hogy az  $s \in A'$  szimbólum a program  $k$ -ik sorában a címkezőnában szerepel. Ekkor a szimbólum minden menetben felveszi az operanduszónában található kifejezés pillanatnyi értékét.

**3.4. Definíció.** Ha  $s \in a(k)$ , akkor minden  $i \geq 1$ -re

$$val^{(i)}(s, k^{(1)}) = \begin{cases} \varepsilon & \text{ha } \exists r \in u_A(k), \\ & \text{melyre } val^{(i)}(r, k^{(3)}) = \varepsilon \\ \times_{u_O(k)} val^{(i)}(q, k^{(3)}) & \text{egyébként} \end{cases}$$

ahol  $q \in u_A(k) \cup u_O(k)$ , és  $\times$  a kifejezésben levő  $u_O(k) \subseteq U_O$  műveletek elvégzését jelenti.

Ha egy szimbólum értékét a program egy sorában meghatározzuk, akkor a hatáskörében levő predefinit hivatkozások értéke megegyezik ezzel az értékkel, míg a postdefinit hivatkozások csak a következő menetben kapják meg ezt az értéket.

**3.5. Definíció.** Ha  $s \in a(k)$ ,  $s \in u'_A(l)$ , és  $l^{(3)} \in E(s, k)$ , akkor minden  $i \geq 1$ -re  $k < l$  esetén

$$val^{(i)}(s, l^{(3)}) = val^{(i)}(s, k^{(1)}),$$

$k \geq l$  esetén pedig

$$\text{val}^{(i+1)}(s, l^{(3)}) = \text{val}^{(i)}(s, k^{(1)}).$$

A fenti definíció szerint, a második és további menetekben az első sor operanduszónájában levő szimbólum értéke megegyezik a szimbólumnak a program utolsó sorában érvényes értékével. Ez azt jelenti, hogy az értékeket egy szimbólumtáblában lehet tárolni, és a szimbólumtáblába beírt értékek menetváltáskor nem változnak meg.

A definíciókból azonban sajnos nem látható, hogy egy szimbólum értéke mikor, melyik menetben határozható meg. Ezért az értékek meghatározására egy új fogalmat, a szimbólumok posztdefinitási fokát vezetjük be, majd az értékadás és a posztdefinitási fok kapcsolatát vizsgáljuk.

#### 4. A posztdefinitási fok

Egy paraméter értéke nem definiált, ha az értékét meghatározó kifejezésben nemdefiniált értékű szimbólum van. Ha ez a szimbólum posztdefinitása miatt van, valószínű, hogy az assembler valamelyik menetben már definiálja a szimbólum értékét, és így ezután a paraméter értéke is meghatározható lesz.

**4.1. Definíció.** Ha  $s \in a(k)$ , akkor az  $s$  szimbólum posztdefinitási foka  $k^{(1)}$ -ben legyen

$$pd(s, k^{(1)}) = \begin{cases} 0 & \text{ha } u'_A(k) = \emptyset \\ \max_{\tau \in u'_A(k)} pd(\tau, k^{(3)}) & \text{egyébként} \end{cases}$$

A definíció szerint a címkezőna paramétere átveszi az operanduszónájában szereplő legmagasabb posztdefinitású fokú szimbólum posztdefinitási fokszámát.

**4.2. Definíció.** Ha  $s \in a(k)$ ,  $s \in u'_A(l)$ , és  $l^{(3)} \in E(s, k)$ , akkor az  $s$  szimbólum posztdefinitási foka  $l^{(3)}$ -ban legyen

$$pd(s, l^{(3)}) = \begin{cases} pd(s, k^{(1)}) & \text{ha } l > k \\ pd(s, k^{(1)}) + 1 & \text{ha } l \leq k \end{cases}$$

A definíció azt mondja ki, hogy a posztdefinit hivatkozásban a szimbólum posztdefinitási foka eggyel nagyobb, mint a definíció helyén, míg predefinit hivatkozás esetén a posztdefinitási fok nem változik.

A definíciók szerint, ha  $s \in b(k)$ , akkor  $pd(s, k^{(1)}) = 0$ , azaz a címkék posztdefinitási foka a definiálás sorának címkezőnájában nulla, a predefinit hivatkozásaikban szintén nulla, a posztdefinit hivatkozásaikban pedig 1. Tetszőleges paraméterre a következő állítás igaz:

**4.1. TÉTEL.** Ha  $s \in a(k)$ , akkor  $pd(s, k^{(1)}) \geq 0$ .

**Bizonyítás.** Az állítás a 4.1. és a 4.2. definíció következménye.

**4.1. KÖVETKEZMÉNY.** A 4.1. tételből és a 4.2. definícióból következik, hogy  $s \in u'_A(1)$  esetén  $pd(s, 1^{(3)}) > 0$ .

4.2. TÉTEL. Ha  $pd(s, l_1^{(3)}) \neq pd(s, l_2^{(3)})$ , ahol  $1 \leq l_1 < l_2 \leq |P|$ , akkor  $\exists k$ , amelyre  $l_1 \leq k < l_2$ , és  $s \in a(k)$ .

*Bizonyítás.* Ha  $l_1^{(3)}, l_2^{(3)} \in E(s, k)$ , ahol  $s \in a(k)$ , akkor a tétel a 4.1. és a 4.2. definícióból következik.

Ha  $l_1^{(3)} \in E(s, k_1)$ , és  $l_2^{(3)} \in E(s, k_2)$ , ahol  $s \in a(k_1)$ ,  $s \in a(k_2)$  és  $k_1 \neq k_2$ , akkor  $k_1, k_2$  nem lehet az  $E_1 = \{1, \dots, l_1 - 1\}$ ,  $E_2 = \{l_1, \dots, l_2 - 1\}$ ,  $E_3 = \{l_2, \dots, |P|\}$  halmazok egyikének egyszerre sem eleme, mert akkor a  $pd(s, l_1^{(3)}) \neq pd(s, l_2^{(3)})$  feltétel nem teljesül. A  $k_1 \in E_1$  és  $k_2 \in E_3$  eset nem állhat fenn, mert ekkor a feltétel szintén nem teljesül. Ha  $k_1 \in E_1$  és  $k_2 \in E_2$ , vagy ha  $k_1 \in E_2$  és  $k_2 \in E_3$ , akkor az állítás igaz, hiszen az első esetben legyen  $k = k_2$ , a második esetben pedig legyen  $k = k_1$ .

Könnyen belátható, hogy nem minden szimbólumnak van véges posztdefinitási foka. Ha például az  $s$  szimbólum csak a

(0)	(1)	(2)	(3)
$k$	$s$	$=$	$s + 1$

sorban szerepel, akkor a 4.1. és 4.2. definíciók szerint

$$pd(s, k^{(1)}) = pd(s, k^{(3)}) = pd(s, k^{(1)}) + 1,$$

és így kimondhatjuk a következő tételt:

4.3. TÉTEL. Ha  $s \in u'_A(k)$ , és  $k^{(3)} \in E(s, k)$ , akkor  $pd(s, k^{(1)}) = \infty$ .

Ha  $s \in u'_A(1)$ , akkor a 4.1. következmény szerint  $pd(s, 1^{(3)}) \geq 1$ . Ha  $pd(s, 1^{(3)}) < \infty$ , akkor a 4.3. tétel alapján biztosan igaz, hogy  $1^{(3)} \in E(s, k)$  esetén  $k \neq 1$ , azaz  $\exists k$  ( $1 < k \leq |P|$ ), melyre  $1^{(3)} \in E(s, k)$ . Így a 4.2. definíció alapján kimondhatjuk a következő állítást:

4.2. KÖVETKEZMÉNY. Ha  $s \in u'_A(1)$  és  $pd(s, 1^{(3)}) = n < \infty$ , akkor  $1^{(3)} \in E(s, k)$  esetén  $k \neq 1$ , és  $pd(s, k^{(1)}) = n - 1$ .

A 4.3. tétel általánosabban is igaz:

4.4. TÉTEL. Ha az  $s_1, s_2, \dots, s_m$  szimbólumokra

$$s_1 \in a(k_1), s_2 \in u'_A(k_1), k_1^{(3)} \in E(s_2, k_2),$$

$$s_2 \in a(k_2), s_3 \in u'_A(k_2), k_2^{(3)} \in E(s_3, k_3),$$

...

$$s_m \in a(k_m), s_1 \in u'_A(k_m), k_m^{(3)} \in E(s_1, k_1),$$

akkor  $pd(s_i, k_i^{(1)}) = \infty$  ( $1 \leq i \leq m$ ).

*Bizonyítás.* A tétel a posztdefinitási fok 4.1. és 4.2. definícióból következik.

Megjegyezzük, hogy a nem véges posztdefinitási fok mindkét tétel esetében a szimbólumok definícióiban található "kör" következménye.

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha a programban van egy véges posztdefinitású fokú szimbólum, akkor biztosan van nulla posztdefinitású szimbólum is.

**4.5. TÉTEL.** Ha  $s \in a(k)$ , és  $pd(s, k^{(1)}) < \infty$ , akkor  $\exists r \in A'$ , és  $\exists l$  ( $1 \leq l \leq |P|$ ), melyre  $r \in a(l)$ , és  $pd(r, l^{(1)}) = 0$ .

*Bizonyítás.* Legyen  $pd(s, k^{(1)}) = i$ , a 4.1. tétel és a feltétel szerint  $0 \leq i < \infty$ . Az állítást  $i$ -re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk be.

Ha  $i = 0$ , akkor legyen  $r = s$ , és  $l = k$ . Most tegyük fel, hogy az állítás igaz minden  $j \leq i - 1$ -re, és bebizonyítjuk, hogy ekkor az állítás igaz  $j = i$ -re is.

Ha  $pd(s, k^{(1)}) = i$ , akkor a 4.1. definíció szerint  $\exists r_1 \in u'_A(k)$  szimbólum, amelyre  $pd(r_1, k^{(3)}) = i$ , és ha  $r_1 \in a(k_1)$ , akkor  $k^{(3)} \in E(r_1, k_1)$ . A 4.3. tétel szerint  $k_1 \neq k$ . Ha  $k_1 > k$ , akkor a 4.2. definíció szerint  $pd(r_1, k_1^{(1)}) = i - 1$ , és az indukciós feltétel szerint a tétel állítása igaz.

Ha  $k_1 < k$ , akkor a 4.1. definíció szerint  $\exists r_2 \in u'_A(k_1)$  szimbólum, amelyre  $pd(r_2, k_1^{(3)}) = i$ , és ha  $r_2 \in a(k_2)$ , akkor  $k_1^{(3)} \in E(r_2, k_2)$ . Mivel  $k_1 \neq k_2$ ,  $k_2 > k_1$  esetén ismét az indukciós feltétel alkalmazható, míg ha  $k_2 < k_1$ ,  $\exists r_3 \in u'_A(k_2)$  szimbólum, amelyre  $pd(r_3, k_2^{(3)}) = i$ .

Látható, hogy vagy eljutunk egy  $i - 1$  posztdefinitású szimbólumhoz, vagy egy

$$k > k_1 > \dots > k_m$$

sorozatot kapunk, és  $k_m$ -re  $r_{m+1} \in u'_A(k_m)$ ,  $pd(r_{m+1}, k_m^{(3)}) = i$ . Mivel  $k_m \geq 1$ , pesszimális esetben  $k_m = 1$ . Ekkor azonban a 4.2. következmény szerint  $pd(r_{m+1}, l^{(1)}) = i - 1$ , és így az indukciós feltétel ismét alkalmazható.

A fenti tétel bizonyításából az is látható, hogy ha a programban van egy  $0 < n < \infty$  posztdefinitású szimbólum, akkor vannak  $0, 1, \dots, n - 1$  posztdefinitású szimbólumok is:

**4.3. KÖVETKEZMÉNY.** Ha  $s \in a(k)$ , és  $pd(s, k^{(1)}) = n$ , ahol  $0 < n < \infty$ , akkor  $\exists r_1, r_2, \dots, r_{n-1} \in A'$ , és  $\exists l_1, l_2, \dots, l_{n-1}$ , melyre  $1 \leq l_j \leq |P|$ ,  $r_j \in a(l_j)$ , és  $pd(r_j, l_j^{(1)}) = j$  ( $1 \leq j \leq n - 1$ ).

## 5. Az értékadás és a posztdefinitási fok kapcsolata

A továbbiakban a posztdefinitási fok és az értékadás közötti kapcsolatot vizsgáljuk, és megmutatjuk, hogy egy szimbólum posztdefinitási foka meghatározza azt, hogy a szimbólum melyik menetben kap értéket.

Először a nulla posztdefinitási fokú szimbólumokat vizsgáljuk.

5.1. TÉTEL. Ha  $s \in u'_A(l)$ , és  $pd(s, l^{(3)}) = 0$ , akkor  $val^{(1)}(s, l^{(3)}) \neq \varepsilon$ .

*Bizonyítás.* Ha  $s \in a(k)$ , és  $l^{(3)} \in E(s, k)$ , akkor a 4.3. tétel alapján  $k \neq l$ , és  $k > l$  sem lehet, mert  $pd(s, k^{(1)}) = -1$  ellentmond a 4.1. tételnek. Így csak a  $k < l$  eset lehetséges, és a 3.5. definíció alapján  $val^{(1)}(s, l^{(3)}) = val^{(1)}(s, k^{(1)})$ . Mivel a 4.1. és 4.2. definíciók szerint  $pd(s, k^{(1)}) = 0$ , a 3.4. definíció szerint két eset lehetséges:

1. vagy  $u'_A(k) = \emptyset$ , de ekkor  $u_A(k)$  legfeljebb a  $\$$  szimbólumot tartalmazza, amelynek az értéke a 3.1. definíció szerint nem  $\varepsilon$ , és így a 3.4. definíció alapján  $val^{(1)}(s, k^{(1)}) \neq \varepsilon$ , azaz  $val^{(1)}(s, l^{(3)}) \neq \varepsilon$ , vagyis a tétel állítása igaz.
2. vagy  $u'_A(k) \neq \emptyset$ , de ekkor, ha  $s_1 \in u'_A(k)$ , a 4.1. definíció szerint  $pd(s_1, k^{(3)}) = 0$ , azaz az  $u'_A(k)$  is csak nulla posztdefinitású szimbólumokat tartalmaz. Erre az  $s_1$  szimbólumra  $\exists k_1$ , hogy  $s_1 = a(k_1)$ ,  $k^{(3)} \in E(s_1, k_1)$ , és a fentiekhez hasonlóan  $val^{(1)}(s_1, k^{(3)}) = val^{(1)}(s_1, k_1^{(1)})$ ,  $pd(s_1, k_1^{(1)}) = 0$ , és  $k_1 < k$ .

A második esetben megismételve a fenti, az  $s$  és  $k$ -ra alkalmazott eljárást, egy  $s, s_1, s_2, \dots, s_n$  és  $k > k_1 > k_2 > \dots > k_n$  sorozatot kapunk.

Ha az  $s_n$  szimbólumra  $u'_A(k_n) = \emptyset$ , akkor  $val^{(1)}(s_n, k_n^{(1)}) \neq \varepsilon$ , és a tétel állítása igaz, hiszen az  $s_{n-1}, \dots, s_1$  szimbólumokra a 3.4. definíció szerint  $val^{(1)}(s_i, k_i^{(1)}) \neq \varepsilon$ ,  $(n-1 \geq i \geq 1)$ , így  $val^{(1)}(s, k^{(1)}) \neq \varepsilon$  és  $val^{(1)}(s, l^{(3)}) \neq \varepsilon$  is teljesül (2. ábra).

(0)	(1)	(2)	(3)
$k_n$	$s_n$	=	...
...		...	
...		...	
$k_1$	$s_1$	=	$s_2$
...		...	
$k$	$s$	=	$s_1$
...		...	
$l$		...	$s$

2. ÁBRA. A predefinit szimbóumlánc

Ha  $u'_A(k_n) \neq \emptyset$ , és  $k_n \neq 1$ , akkor képezhetjük a sorozatok következő  $s_{n+1} \in u'_A(k_n)$  és  $k_{n+1}$  elemeit. Ha  $k_n = 1$ , akkor a program első sorának harmadik zónájában a 4.1. következmény szerint nem lehet nulla postdefinitású szimbólum, azaz  $u'_A(1)$  csak üres lehet. Így azonban  $val^{(1)}(s_n, l^{(1)}) \neq \varepsilon$ , azaz az  $s_{n-1}, \dots, s_2, s_1, s$  szimbólumok értéke az első menetben meghatározható,  $val^{(1)}(s_i, k_i^{(1)}) \neq \varepsilon$ ,  $(n-1 \geq i \geq 1)$ , és ezért  $val^{(1)}(s, k^{(1)}) \neq \varepsilon$ , azaz  $val^{(1)}(s, l^{(3)}) \neq \varepsilon$ .

A következő állítás a tétel bizonyításából kiolvasható:

5.1. KÖVETKEZMÉNY. Ha  $s \in a(k)$ , és  $pd(s, k^{(1)}) = 0$ , akkor  $val^{(1)}(s, k^{(1)}) \neq \varepsilon$ .

A következő tétel azt mondja ki, hogy ha egy szimbólum értékét az egyik menetben meghatároztuk, akkor ez az érték további menetekben már nem változik meg.

5.2. TÉTEL. Ha  $s \in u'_A(l)$ , és  $pd(s, l^{(3)}) = 0$ , akkor minden  $n_1, n_2 \geq 1$ -re  $val^{(n_1)}(s, l^{(3)}) = val^{(n_2)}(s, l^{(3)})$ .

*Bizonyítás.* Azt fogjuk bebizonyítani, hogy minden  $m \geq 1$ -re  $val^{(m)}(s, l^{(3)}) = val^{(m+1)}(s, l^{(3)})$ , ebből a tétel állítása már következik.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz  $val^{(m)}(s, l^{(3)}) \neq val^{(m+1)}(s, l^{(3)})$ . Ekkor, az előző tétel bizonyításának menetét megismételve, az ott használt jelöléseket használva (2. ábra),  $val^{(m)}(s, k^{(1)}) \neq val^{(m+1)}(s, k^{(1)})$ . Az 1. eset biztosan nem állhat fenn, mivel a 3.1. definíció szerint a  $\$$  szimbólum értéke mindig ismert és független a menetszámtól, így csak a 2. eset lehetséges, de ekkor az utóbbi egyenlőtlenség csak akkor teljesül, ha  $val^{(m)}(s_1, k_1^{(1)}) \neq val^{(m+1)}(s_1, k_1^{(1)})$ . Mivel a továbbiakban is mindig csak a 2. eset állhat fenn, most biztosan eljutunk az  $s_n$  szimbólumhoz, melyre  $pd(s_n, l^{(1)}) = 0$ , és  $val^{(m)}(s_n, l^{(1)}) \neq val^{(m+1)}(s_n, l^{(1)})$ . A 4.1. következmény szerint  $u_A(1)$  legfeljebb csak a  $\$$  szimbólumot tartalmazza, ezért a  $val^{(m)}(s_n, l^{(1)})$  és a  $val^{(m+1)}(s_n, l^{(1)})$  értékek a 3.4. definíció szerint csak azonosak lehetnek. Ellentmondásra jutottunk, és így a tétel állítását bebizonyítottuk.

A fenti két tétel a nem nulla posztdefinitási fokú szimbólumokra is bebizonyítható.

5.3. TÉTEL (AZ ASSEMBLÁLÁS ALAPTÉTELE). Ha  $s \in u'_A(l)$ , és  $pd(s, l^{(3)}) = n < \infty$ , akkor  $val^{(n+1)}(s, l^{(3)}) \neq \varepsilon$ .

*Bizonyítás.* A tételt teljes indukcióval bizonyítjuk. Az  $n = 0$  esetben az állítás a 5.1. tétel szerint teljesül. Tegyük fel, hogy minden  $s_i$  szimbólumra  $s_i \in u'_A(k_i)$ ,  $pd(s_i, k_i^{(3)}) = j - 1$  esetén a tétel állítása igaz, azaz  $val^{(j)}(s_i, k_i^{(3)}) \neq \varepsilon$ .

Bebizonyítjuk, hogy ekkor, ha  $s \in u'_A(l)$ ,  $pd(s, l^{(3)}) = j$  teljesül, akkor  $val^{(j+1)}(s, l^{(3)}) \neq \varepsilon$ .

Ha  $s \in a(k)$ , és  $l^{(3)} \in E(s, k)$ , akkor a 4.3. tétel alapján  $k \neq l$ . Ha  $k > l$ , akkor a 4.2. definíció szerint  $pd(s, k^{(1)}) = j - 1$ , azaz az indukciós feltétel alapján  $val^{(j)}(s, k^{(1)}) \neq \varepsilon$ . A 3.5. definíció viszont azt mondja ki, hogy  $val^{(j+1)}(s, l^{(3)}) = val^{(j)}(s, k^{(1)})$ , így a tétel állítása a  $k > l$  esetben igaz.

Ha  $k < l$ , a 3.5. definíció alapján  $val^{(j+1)}(s, l^{(3)}) = val^{(j+1)}(s, k^{(1)})$ . Mivel a 4.2. definíció szerint  $pd(s, k^{(1)}) = j$ , a 4.1. definíció szerint  $\exists s_1 \in u'_A(k)$ , melyre a  $pd(s_1, k^{(3)}) = j$ . Erre az  $s_1$  szimbólumra  $\exists k_1$ , hogy  $s_1 = a(k_1)$ ,  $k^{(3)} \in E(s_1, k_1)$ . Ha  $k_1 > k$ , akkor készen vagyunk, hiszen a 3.5. és 4.2. definíciók szerint  $val^{(j+1)}(s_1, k^{(3)}) = val^{(j)}(s_1, k_1^{(1)})$ , és  $pd(s_1, k_1^{(1)}) = j - 1$ .

Ha  $k_1 < k$ , akkor megismételve a fenti, az  $s$  és  $k$ -ra alkalmazott eljárást, vagy eljutunk egy  $j - 1$  posztdefinitási fokú szimbólumhoz, vagy egy  $s, s_1, s_2, \dots, s_n$  és  $k > k_1 > k_2 > \dots > k_n$  sorozatot kapunk. Pesszimális esetben  $k_n = 1$ , és képezve a sorozat következő  $s_{n+1}$



elemét,  $pd(s_{n+1}, 1^{(3)}) = j$ . A 3.5. és 4.2. definíciók alapján, a 4.2. következmény szerint  $s_{n+1} \in a(k_{n+1})$  esetén  $pd(s_{n+1}, k_{n+1}^{(1)}) = j - 1$ , és  $val^{(j)}(s_{n+1}, k_{n+1}^{(1)}) = val^{(j+1)}(s_{n+1}, 1^{(3)})$ . Ez az érték az indukciós feltétel alapján  $\neq \varepsilon$ , így a tétel állítását ebben az esetben is bebizonyítottuk.

Most az 5.2. tételhez hasonlóan, a nemnulla posztdefinitási fokú szimbólumokra is bebizonyítjuk, hogy a  $n + 1$ -ik menetben meghatározott érték további menetekben már nem változik meg.

**5.4. TÉTEL.** Legyen  $s \in u'_A(l)$ . Ha  $pd(s, l^{(3)}) = n < \infty$ , akkor minden  $n_1, n_2 \geq n + 1$ -re  $val^{(n_1)}(s, l^{(3)}) = val^{(n_2)}(s, l^{(3)})$ .

*Bizonyítás.* Azt fogjuk bebizonyítani, hogy minden  $m \geq n + 1$ -re  $val^{(m)}(s, l^{(3)}) = val^{(m+1)}(s, l^{(3)})$ , ebből a tétel állítása már következik.

Tegyük fel, hogy az állítás nem igaz, azaz  $val^{(m)}(s, l^{(3)}) \neq val^{(m+1)}(s, l^{(3)})$ . Először bebizonyítjuk, hogy a feltételezésből az következik, hogy létezik legalább egy  $s_1$  szimbólum, amelyre  $s_1 \in a(k_1)$  esetén  $pd(s_1, k_1^{(1)}) \leq n - 1$ , és  $s_1$  értéke két menetben különböző.

Legyen  $s \in a(k)$ ,  $l^{(3)} \in E(s, k)$ , ekkor feltételezésünk a 3.5. definíció szerint csak úgy lehetséges, ha

1.  $k > l$  esetén  $val^{(m-1)}(s, k^{(1)}) \neq val^{(m)}(s, k^{(1)})$ , de ekkor a 4.2. definíció szerint  $pd(s, k^{(1)}) = n - 1$ . Tehát találtunk egy olyan szimbólumot, melynek posztdefinitási foka  $n - 1$ , és értéke a két menetben különböző. Legyen  $s_1 = s$ , és  $k_1 = k$ .
2.  $k < l$  esetén  $val^{(m)}(s, k^{(1)}) \neq val^{(m+1)}(s, k^{(1)})$ , és a 4.2. definíció szerint  $pd(s, k^{(1)}) = n$ . A 3.4. definíció szerint ekkor  $\exists r_1 \in u'_A(k)$ , melyre  $val^{(m)}(r_1, k^{(3)}) \neq val^{(m+1)}(r_1, k^{(3)})$ , és a 4.1. definíció szerint  $pd(r_1, k^{(3)}) \leq n$ . Ha  $pd(r_1, k^{(3)}) < n$ , akkor legyen  $s_1 = r_1$ , és  $k_1 = k$ . Ha  $pd(r_1, k^{(3)}) = n$ , akkor  $r_1 \in a(k_{r_1})$ ,  $k^{(3)} \in E(r_1, k_{r_1})$  esetén,  $k_{r_1} > k$  teljesülésekor alkalmazható az 1. eset, és legyen  $s_1 = r_1$ ,  $k_1 = k_{r_1}$ , míg  $k_{r_1} < k$  esetén ismételjük meg ezt az eljárást az  $r_1$  szimbólumra és a  $k_{r_1}$  sorra. Az így kapott  $r_2$  szimbólumra és a  $k_{r_2}$  sorra vagy  $pd(r_2, k_{r_1}^{(3)}) < n$ , vagy ellenkező esetben  $k_{r_2} < k_{r_1}$ .

Ez utóbbi esetben megismételve az eljárást, pesszimális esetben eljutunk az  $r_j$  szimbólumig és a  $k_{r_j} = 1$  sorig, melyre  $val^{(m)}(r_j, k_{r_j}^{(1)}) \neq val^{(m+1)}(r_j, k_{r_j}^{(1)})$ , és  $pd(r_j, k_{r_j}^{(1)}) = n$ . Ekkor  $\exists r_{j+1}$ , melyre  $val^{(m)}(r_{j+1}, k_{r_j}^{(3)}) \neq val^{(m+1)}(r_{j+1}, k_{r_j}^{(3)})$ , és  $pd(r_{j+1}, k_{r_j}^{(3)}) \leq n$ . A 3.5. és 4.2. definíciók alapján, a 4.2. következmény szerint  $r_{j+1} \in a(k_{r_{j+1}})$  esetén  $pd(r_{j+1}, k_{r_{j+1}}^{(1)}) = n - 1$ , és  $val^{(m-1)}(r_{j+1}, k_{r_j}^{(1)}) \neq val^{(m)}(r_{j+1}, k_{r_j}^{(1)})$ , azaz biztosan eljutunk egy  $n - 1$  posztdefinitási fokú szimbólumhoz, amelynek értéke két menetben különböző.

Tehát  $\exists s_1 \in u'_A(k_1)$ , melyre  $m - 1 \geq n$  esetén  $val^{(m-1)}(s_1, k_1^{(3)}) \neq val^{(m)}(s_1, k_1^{(3)})$ , és  $pd(s_1, k_1^{(3)}) \leq n - 1$ .

Ezt a módszert alkalmazva, előállíthatunk egy  $s_1, s_2, \dots, s_i$  szimbólumsorozatot és egy  $k_1, k_2, \dots, k_i$  sorozatot, amelyre  $pd(s_i, k_i^{(1)}) = 0$ , és  $val^{(m)}(s_i, k_i^{(1)}) \neq val^{(m+1)}(s_i, k_i^{(1)})$ . Ez viszont ellentmond az 5.2. tételnek, és így a tétel állítását bebizonyítottuk.

5.1. *Definíció.* Legyen a  $P$  program posztdefinitási foka

$$pd(P) = \begin{cases} 0 & \text{ha } U'_A = \emptyset \\ \max_{1 \leq k \leq |P|} \max_{s \in u'_A(k)} pd(s, k^{(3)}) & \text{egyébként} \end{cases}$$

Egy program posztdefinitási foka tehát az operanduszónájában szereplő legmagasabb posztdefinitási fokú szimbólum posztdefinitási foka. A következő állítás azt mondja ki, hogy ha egy program posztdefinitási foka  $n$ , akkor a program egy  $n + 1$ -menetes assemblerrel fordítható le:

5.5. *TÉTEL.* Egy  $P$  program minden  $s \in U'_A$  szimbólumára  $s \in u'_A(l)$  esetén  $val^{(pd(P)+1)}(s, l^{(3)}) \neq \epsilon$ .

A tétel a 3.1., 3.4. és 3.5. definíciók, valamint az 5.3. és 5.4. tételek következménye.

Mivel  $U'_A \subseteq A$ , a 4.2. definíció alapján a fenti tétel állítása minden  $s \in A$  szimbólumra is igaz:

5.2. *KÖVETKEZMÉNY.* Egy  $P$  program minden  $s \in A$  szimbólumára  $s \in a(k)$  esetén  $val^{(pd(P)+1)}(s, k^{(1)}) \neq \epsilon$ .

Ezzel egy assembly nyelvű program minden szimbólumának értékadásával foglalkoztunk.

Mivel  $s \in b(k)$  esetén  $pd(s, k^{(1)}) = 0$ , és  $l^{(3)} \in E(s, k)$ -ra  $pd(s, l^{(3)}) \leq 1$ , a címkék fordítása egy legfeljebb kétmenetes assemblerrel elvégezhető, és ez az oka annak, hogy az assemblerek többsége kétmenetes. Megjegyezzük, hogy léteznek egymenetes assemblerek is, de ezek a szimbólumok kezelésére egy speciális, jól megválasztott adatszerkezetet használnak.

Az assemblerek többsége a magasabb, 1-nél nagyobb posztdefinitási fokú szimbólumok fordítását nem tudja megoldani [5], és a programozó feladata az, hogy az assembly nyelvű program módosításával, a szimbólumokat definiáló programsorok átrendezésével a szimbólumok posztdefinitási fokát 1-re csökkentse.

#### IRODALOM

- [1] BRUMM, P., BRUMM, D., *80386/80486 Assembly Language Programming*, Windcrest/McGraw-Hill, 1993.
- [2] CHIU, P.P.K., FU, S.T.K., „A Generative Approach to Universal Cross Assembler Design”, *Sigplan Notices* 25 (1990, No. 1.), 43–51.
- [3] CSÖRNYEI, Z., *On the Postdefiniteness of Symbols in Assembly Languages*, First Joint Conference on Modern Applied Mathematics, Ilieni/Ilyefalva, Romania, 15-17 June, 1995.
- [4] CSÖRNYEI, Z., *The Fundamental Theorem of Assemblers*, Conference at Dept. of Computer Science, Babeş-Bolyai University, Cluj-Napoca, 8th November, 1994. (unpublished).
- [5] CSÖRNYEI Z., *Univerzális mikroprocesszor assemblerek*, Doktori értekezés, ELTE, 1980.
- [6] GILES, W.B., *Assembly Language Programming for the Intel 80xxx Family*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York, NY., 1991.

- [7] KINDRED, A.R., *Structured Assembler Language for IBM Microcomputers*, Hartcourt Brace, Orlando, FL., 1991.
- [8] NELSON, R.P., *Microsoft's 80386/80486 Programming Guide*, Microsoft Press, Redmond, WA., 1991.
- [9] THORNE, M., *Computer Organization and Assembly Language Programming for IBM PCs and Compatibles*, Benjamin-Cummings Publ. Co., Inc., Redwood City, CA., 1991.
- [10] TURLEY, J.L., *Advanced 80386 Programming Techniques*, Osborne McGraw-Hill, Berkeley, CA., 1988.
- [11] WICK, J.D., *Automatic generation of assemblers*, Yale University, Dept. of Computer Science, Research Report No. 50., 1975.

(Beérkezett: (1995. július 5.))

CSÖRNYEI ZOLTÁN  
EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
ÁLTALÁNOS SZÁMÍTÁSTUDOMÁNYI TANSZÉK  
1088 BUDAPEST, MÚZEUM KRT. 6-8.

## THE THEORY OF ASSEMBLERS

Z. CSÖRNYEI

The main purpose of assemblers is to assign values to the symbols of an assembly program. The target program is assembled from these values. The process of assigning values is studied, the values of the symbols are generated depending on the number of passes and the degree of postdefiniteness. The exact number of passes needed to translate an assembly program is determined.



# ÉRINTŐ-KONVEXFÜGGVÉNYEKKEL GENERÁLT EGYENLETMEGOLDÓ ITERÁCIÓK

VÁRTERÉSZ MAGDOLNA

Debrecen

Szabó Z. [2, 3] dolgozataiban érintő-kúpszeletek és bizonyos érintő-konvexfüggvények segítségével generált mindig konvergens egyenletmegoldó iterációkat dolgozott ki. [5]-ben ezen iterációk általánosításaként egy olyan iterációs alapfüggvényekből álló függvénycsaládot konstruáltunk, melynek tagjait érintő-konvexfüggvények segítségével kaphatjuk meg, és mindig konvergens módszereket állítanak elő. Jelen cikkben ezen iterációk tulajdonságait és alkalmazási lehetőségeit mutatjuk be.

## 1. Bevezetés

Legyen  $f : R \mapsto R$  tetszőleges folytonos, elegendően sokszor differenciálható valós függvény. Célunk az  $f$  függvény  $\alpha$  zérushelyeinek, azaz az  $f(x) = 0$  nem-lineáris egyenlet megoldásainak közelítése. Az egyik legjelentősebb és legtöbbet vizsgált közelítő eljárás az

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

iterációs alapfüggvénnyel rendelkező Newton-Raphson-módszer. Az iterációs eljárások gyorsaságának és hatékonyságának jellemzésére a J. F. Traub által [4]-ben bevezetett konvergenciarend és információs hatékonyság fogalmakat használva azt mondhatjuk, hogy ez az eljárás egyszeres zérushely esetén másodrendű és optimális, de nem mindig konvergens. A szintén közismert módosított Newton-módszer viszont nem okoz ilyen problémát: ha van olyan  $M_1 > 0$  valós szám, melyre

$$|f'(x)| \leq M_1, \text{ ha } x \in I = [a, b] \subset R,$$

akkor az  $f(x_0) \neq 0$  feltételnek eleget tevő, egyébként tetszőleges  $x_0 \in I$  kezdőpontból kiinduló, s az

$$F(x) = x - \frac{|f(x)|}{M_1}$$

iterációs alapfüggvénnyel képzett  $\{x_n\}$  iterációs sorozat monoton csökkenő, és konvergál  $f$ -nek az  $x_0$ -tól balra fekvő legközelebbi  $\alpha \in I$  zérushelyéhez, ha van  $f$ -nek zérushelye az  $[a, x_0]$  szakaszban, egyébként pedig  $\{x_n\}$  kilép az  $I$  intervallumból. (Az

$$F(x) = x + \frac{|f(x)|}{M_1}$$

iteráció esetében hasonló állítás igaz, csak az iterációs sorozat monoton növekedő, és  $[x_0, b]$ -beli zérushelyhez konvergál, ha van.) Ez a módszer tehát az  $I$  intervallumban az  $x_0$  kezdőérték választásától függetlenül mindig konvergens. Sajnos azonban míg a Newton-Raphson-iteráció másodrendű, a módosított Newton-módszer csak elsőrendben konvergál. A módosított Newton-módszer konvergenciájának természetéhez hasonló tulajdonságú iterációk vizsgálatával részletesen Szabó Z. foglalkozott [2] cikkeiben. Ezen iterációk számára bevezette a következő definíciót:

*Definíció 1.1.* Az  $F(x; r)$  iterációs alapfüggvény és az általa generált iterációs eljárás az  $f$  függvényre vonatkozóan az  $I = [a, b]$  intervallumban mindig konvergens, ha az  $f(x_0) \neq 0$  tulajdonságú, egyébként tetszőleges  $x_0 \in I$  pontból kiinduló, s az  $F(x; r)$  iterációs alapfüggvénnyel képzett  $\{x_n\}$  sorozat

1. monoton;
2. konvergál az  $f$  függvénynek az  $x_0$  ponttól jobbra (ill. balra) legközelebb lévő  $\alpha \in I$  zérushelyéhez - ha ilyen tulajdonságú  $\alpha$  létezik - aszerint, hogy az  $r$  "irányparaméter" értékét az iteráció során következetesen 1-nek (ill. (-1)-nek) választjuk;
3. amennyiben ilyen tulajdonságú  $\alpha \in I$  pont nem létezik,  $\{x_n\}$  kilép az  $I$  szakaszból.

Ezek után a módosított Newton-módszerről a következőt mondhatjuk: ha létezik olyan  $M_1 > 0$  valós szám, melyre

$$|f'(x)| \leq M_1, \text{ ha } x \in I,$$

akkor az

$$F(x; r) = x + r \frac{|f(x)|}{M_1}$$

iterációs alapfüggvény, és az általa generált módosított Newton-módszer mindig konvergens.

Szabó Z.-nak [2]-ben sikerült ennél az iterációnál gyorsabb, másodrendű, mindig konvergens iterációs eljárásokat megadnia, melyeket  $f$ -et érintő kúpszeletek, illetve  $f$ -et érintő bizonyos konvex függvények segítségével generált. Jelen dolgozat bemutat ezen módszerek általánosításával egy mindig konvergens és másodrendű iterációs függvénycsaládot, melynek iterációs alapfüggvényei  $f$ -et érintő konvex függvények segítségével állíthatók elő. Ezen konvex függvények alkalmas megválasztásával előállíthatók többek között a Szabó Z. [2] cikkeiben megadott érintőkúpszelet- és érintőkonvexfüggvény-módszerek iterációs alapfüggvényei is.

## 2. Az érintő-konvexfüggvények módszere

**FELTÉTELEK 2.1.** Tegyük fel, hogy az  $f : [a, b] = I \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  függvény kétszer folytonosan differenciálható  $I$ -n, és

$$|f(x)| \leq M, \quad |f'(x)| \leq M_1, \quad |f''(x)| \leq M_2, \text{ ha } x \in I$$

valamely  $M, M_1, M_2 > 0$  valós számokra.

**FELTÉTELEK 2.2.** Legyen továbbá a  $g : (-h, h) = H \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  egy alulról konvex és  $H$ -n kétszer folytonosan differenciálható függvény, melyre

$$g(0) = g'(0) = 0 \text{ és } g''(x) > 0, \text{ ha } x \in H.$$

Vezessük be még a  $Q_1^* \doteq \min\{|\inf_{x \in H} g'(x)|, \sup_{x \in H} g'(x)\}$  jelölést.

Megjegyezzük, hogy Szabó Z. [2, 3]-ban olyan érintő-konvexfüggvényekkel dolgozott, melyek kielégítik a szigorúbb  $g''(x) \geq q_2 > 0$ , ha  $x \in H$  feltételt is.

Induljunk ki tetszőleges  $x_0 \in I, f(x_0) \neq 0$  kezdőpontból. Legyen  $c > \frac{M_1}{Q_1^*}$ ,  $(\frac{M_1}{\infty} \doteq 0)$  és  $s \doteq \text{sign}(f(x_0))$ . Illesszük elsőrendben az

$$y = -s \cdot c \cdot g(x)$$

függvényt párhuzamos eltolással az  $f$  függvényhez, ennek  $(x_0, f(x_0))$  pontjában. A kapott

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g(x - \mu) + \lambda$$

függvény  $\mu, \lambda$  paramétereinek értékeit a

$$-s \cdot c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda = f(x_0)$$

$$-s \cdot c \cdot g'(x_0 - \mu) = f'(x_0)$$

egyenletrendszerből határozhatjuk meg. A 2.2 feltételek miatt  $g'$  invertálható a számunkra szükséges helyen, ezért

$$\mu = x_0 - g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right),$$

és

$$\lambda = f(x_0) + s \cdot c \cdot g\left(g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)\right).$$

Tehát az  $f$  függvényt az  $(x_0, f(x_0))$  pontban elsőrendben érintő konvex függvény alakja a következő:

$$G(x) = -s \cdot c \cdot g\left(x - x_0 + g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)\right) + f(x_0) + s \cdot c \cdot g\left(g'^{-1}\left(-\frac{s}{c}f'(x_0)\right)\right).$$

**LEMMA 2.1.** Teljesüljenek a 2.1 és 2.2 feltételek. Létezzen továbbá  $q_2 > 0$  úgy, hogy

$$q_2 \leq g''(x), \text{ ha } x \in \left[a - b + g'^{-1}\left(-\frac{M_1}{c}\right), b - a + g'^{-1}\left(\frac{M_1}{c}\right)\right] \cap H,$$

és legyen  $\frac{M_2}{q_2} \leq c$ . Ekkor a  $G$  függvény értéke  $G$  értelmezési tartományának  $I$ -be eső részében  $s = 1$  esetén nem nagyobb,  $s = -1$  esetén nem kisebb, mint  $f$  értéke.

**Bizonyítás.** Legyen először  $s = 1$ . A kérdéses intervallumban a feltételek alapján alkalmazhatjuk a Taylor-formulát mind  $f$ , mind  $G$ -re:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2,$$

$$G(x) = G(x_0) + G'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_0)^2,$$

ahol  $\xi = x_0 + \vartheta_1(x - x_0)$ ,  $\eta = x_0 + \vartheta_2(x - x_0)$ , és  $\vartheta_1, \vartheta_2 \in (0, 1)$ . Lássuk be, hogy a

$$\begin{aligned} D(x) &\doteq f(x) - G(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_0)^2 - \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_0)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ f''(\xi) + c \cdot g'' \left( \eta - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) \right) \right] (x - x_0)^2 \end{aligned}$$

különbségfüggvény nemnegatív ebben az intervallumban. Ehhez elegendő bizonyítani a

$$-f''(\xi) \leq c \cdot g'' \left( \eta - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) \right)$$

egyenlőtlenség teljesülését. Jelölje

$$\eta' \doteq \eta - x_0 + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right) = \vartheta_2(x - x_0) + g'^{-1} \left( -\frac{f'(x_0)}{c} \right).$$

Ekkor

$$\eta' \in \left[ a - b + g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right), b - a + g'^{-1} \left( \frac{M_1}{c} \right) \right] \cap H.$$

Így tételünk feltételei miatt az

$$|f''(\xi)| \leq M_2 \leq M_2 \cdot \frac{g''(\eta')}{q_2} \leq c \cdot g''(\eta')$$

egyenlőtlenség teljesül, amit bizonyítani akartunk.  $s = -1$  esetén a bizonyítás hasonló.

Határozzuk meg most a  $G$  függvény  $x_1$  és  $x'_1$  zérushelyeit. Ehhez bontsuk fel a  $g$  konvex függvényt két szigorúan monoton függvényágra:

$$g(x) = \begin{cases} g_{-1}(x), & \text{ha } x \leq 0 \\ g_1(x), & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

LEMMA 2.2. *Teljesüljenek a 2.1. és 2.2. feltételek. Jelölje továbbá*

$$Q \doteq \begin{cases} \sup g(x), & \text{ha } g \text{ korlátos} \\ \infty & \text{egyébként} \end{cases}$$

és  $\frac{M}{\infty} \doteq 0$ . Tegyük fel, hogy az

$$\frac{M}{Q - g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right)} < c$$



egyenlőtlenség teljesül. Ekkor a  $G$  függvény zérushelyei:

$$\left. \begin{matrix} x_1 \\ x'_1 \end{matrix} \right\} = x_0 - g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) + g_{\pm 1}^{-1} \left( \frac{|f(x_0)|}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_0) \right) \right) \right).$$

**Bizonyítás.** Legyen először megint  $s = 1$ . A bizonyítás első lépéseként lássuk be, hogy a  $G$  függvény görbéje metszi az abszcisszatengelyt.  $Q = \infty$  esetén ez az állítás triviális. Legyen most  $g$  korlátos. A tételünk feltétele alapján ekkor

$$M + c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) < c \cdot Q$$

teljesül. Ez azt jelenti, hogy a  $g$  függvény úgy meg lesz nyújtva a transzformáció során, hogy "tengelye" ( $c \cdot Q$ ) nagyobb lesz, mint amilyen messze az ordinátatengely irányában fel kell tolni. Annál messzebbre viszont nem kell tolnunk a függvénygörbét sohasem, mint mikor elsőrendben az  $f$  egy olyan pontjához illesztenénk, melyen keresztül  $f$  maximális ( $M_1$ ) meredekséggel halad át, és mely legnagyobb ( $M$ ) távolságra van az abszcisszatengelytől. Bevezetve a  $K \doteq \frac{M}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right)$  jelölést, a

$$-c \cdot g(x_0 - \mu) + \lambda^* = M$$

$$-c \cdot g'(x_0 - \mu) = M_1$$

egyenletrendszerből meg tudjuk határozni a lehetséges legnagyobb mértékű  $\lambda^*$  eltolást:

$$\lambda^* = M + c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) = K \cdot c.$$

Ebből viszont az következik, hogy a  $G$  függvény görbéjének mindkét ága metszeni fogja az abszcisszatengelyt, azaz  $G$ -nek két zérushelye van, melyek a lemmában megadott alakúak lesznek. Az  $s = -1$  esetben a bizonyítás hasonló.

Ezek után az iterációs eljárásunk a következő: Az  $f$  függvényt az  $(x_0, f(x_0))$  pontban érintő  $G$  konvex függvény  $x_1 (> x'_1)$  zérushelyét meghatározva, most az  $x_0$  helyett az  $x_1$  pontból kiindulva folytassuk módszerünket, azaz az  $f$  függvényt az  $(x_1, f(x_1))$  pontban érintő  $G$  konvex függvény nagyobb  $x_2$  zérushelyét határozzuk meg, és így tovább. E zérushelyeket a 2.2 lemmából ismert

$$x_{n+1} = x_n - g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_n) \right) + g_1^{-1} \left( \frac{|f(x_n)|}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x_n) \right) \right) \right),$$

$n = 0, 1, \dots$  képlet segítségével tudjuk kiszámolni. Így előállíthatunk egy  $\{x_n\}$  iterációs sorozatot. Ha pedig az eljárásunk során  $G$ -nek következetesen mindig a kisebb  $x'_i$  zérushelyét választjuk, akkor egy másik iterációs sorozathoz jutunk. Ezen iterációs sorozatok tulajdonságait foglalja össze a következő tétel:

**TÉTEL 2.1.** *Ha teljesülnek a 2.1 és 2.2 lemmák feltételei, akkor az*

$$F(x; r) = x - g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x) \right) + g_r^{-1} \left( \frac{|f(x)|}{c} + g \left( g'^{-1} \left( -\frac{s}{c} f'(x) \right) \right) \right)$$

*iterációs alapfüggvény és az általa generált érintő-konvexfüggvények módszere mindig konvergens.*

Megjegyezzük, hogy Szabó Z. [2,3]-ban ugyanilyen alakú iterációs alapfüggvényt állított elő bizonyos érintő-konvexfüggvények segítségével.

**Bizonyítás.** Legyen először megint  $s = 1$ . Legyenek az  $f$ -et az  $(x_0, f(x_0))$  pontban érintő konvex függvény zérushelyei a 2.2. lemmából ismert  $x_1$  és  $x'_1$ , és legyen  $x'_1 < x_1$ . Ekkor természetesen  $x'_1 < x_0 < x_1$ . A lemma miatt

$$0 \leq G(x) \leq f(x), \text{ ha } x \in [x'_1, x_1] \cap I.$$

Így, ha  $x_1, x'_1 \in I$ , akkor nyilván

$$0 = G(x'_1) \leq f(x'_1), \text{ és } 0 = G(x_1) \leq f(x_1)$$

teljesül. Azaz, ha eljárásunkat az  $x_0$  helyett akár az  $x_1$ , akár az  $x'_1$  ponttal folytatjuk,  $f(x_1)$  és  $f(x'_1)$  sem negatív, és az új érintő-konvexfüggvények megfelelő zérushelyeire igaz, hogy

$$x_0 < x_1 \leq x_2, \text{ és } f(x_2) \geq 0,$$

$$x'_2 \leq x'_1 < x_0, \text{ és } f(x'_2) \geq 0.$$

Ebből következik, hogy a módszerünkkel előállított  $x_0, x_1, x_2, \dots$  iterációs sorozat monoton növekvő,  $x_0, x'_1, x'_2, \dots$  pedig monoton csökkenő, és  $f(x_n) \geq 0$ , ill.  $f(x'_n) \geq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Vizsgáljuk most az  $\{x_n\}$  sorozatot. Három eset fordulhat elő:

- (1) 1.  $f(x_n) \neq 0$  és  $x_n \in I$ ,  $n = 0, 1, \dots$ . Ekkor a sorozat szigorúan monoton nő és korlátos, így

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in I.$$

Mivel pedig  $F(x; 1)$  folytonos,  $\alpha$   $F$  fixpontja, azaz  $f(\alpha) = 0$ .

- (2) 2. Van olyan  $i > 0$ , hogy  $f(x_i) = 0$ , és  $x_i \in I$ . Ekkor  $x_{i+1} = F(x_i; 1) = x_i$ , tehát  $x_{i+k} = x_i$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Így most is

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \in I, \text{ és } f(\alpha) = 0.$$

- (3) 3.  $f(x_n) \neq 0$ , és  $x_n \in I$ , ha  $n = 0, 1, \dots, i-1$ , de  $x_i \notin I$ . Ekkor a 2.1 lemma alapján  $f$ -nek nincs zérushelye az  $[x_0, b]$  intervallumban.

Hasonlóan vizsgálható az  $x_0, x'_1, x'_2, \dots$  monoton csökkenő sorozat, csak a vizsgálat helye az  $[a, x_0]$  intervallum.  $s = -1$  esetén a bizonyítás hasonló.

A következő tételben az érintő-konvexfüggvények módszerének abszolút hibakorlátjaira adunk becsléseket. Jelölje  $e_n$  az  $\alpha - x_n$  és  $d_n$  az  $x_{n+1} - x_n$  különbségeket. Legyen továbbá  $T \doteq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1}$  és  $L_i \doteq \frac{M_i}{m_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

**TÉTEL 2.2.** Ha teljesülnek a 2.1 és 2.2 lemmák feltételei, és valamely  $x_0 \in I$  pontból kiinduló, az érintő-konvexfüggvények módszere segítségével előállított  $\{x_n\}$  iterációs sorozat tart az  $f$  függvény valamely  $\alpha (\in I)$  egyszeres zérushelyéhez, továbbá teljesülnek a

$$0 < m_1 \leq |f'(x)|, \text{ ha } x \in [x_0, \alpha], \\ g''(x) \leq Q_2, \text{ ha } x \in [g_1^{-1}(K), g_1^{-1}(K)]$$

feltételek, akkor a következő hibabecslések érvényesek:

$$|e_{n+1}| \leq (T + L_2)|e_n|^2, \quad n = 0, 1, \dots \\ |e_{n+1}| \leq TL_2|d_n|^3 + (T + L_1L_2)|d_n|^2, n = 0, 1, \dots$$

**Bizonyítás.** Legyen először ismét  $s = 1$ , és legyen  $x_0 < \alpha$ . Mivel  $\alpha$  egyszeres zérushely,  $f'(\alpha) < 0$ , ha  $x \in [x_0, \alpha]$ . Ha most  $f(x_n) = 0$  valamely  $n \geq 1$ -re, akkor  $x_{n+1} = x_n = \alpha$ , s az állítás triviálisan teljesül. Tegyük fel tehát, hogy  $f(x_n) \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Rögzítsük most tetszőlegesen  $n (\geq 0)$ -t. Az  $f$ -et az  $(x_n, f(x_n))$  pontban érintő  $G$  függvényre:

$$G(x) = G(x_n) + G'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_n)^2,$$

ahol  $\eta \in (x_n, x)$ . Az elsőrendben való érintkezés miatt ebből

$$G(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}G''(\eta)(x - x_n)^2$$

következik. A  $G$  függvény  $[x_n, \alpha]$ -ba eső zérushelyét  $x_{n+1}$ -gyel jelölve kapjuk, hogy

$$f(x_n) = -\frac{1}{2}G''(\eta)d_n^2 - f'(x_n)d_n,$$

ahol  $\eta \in (x_n, x_{n+1})$ . De  $G''(\eta) = -c \cdot g''(\eta - \mu)$ , és bevezetve az  $\eta' \doteq \eta - \mu$  jelölést,  $\eta' \in [0, g_1^{-1}(\frac{\lambda}{c})]$ . Tehát

$$f(x_n) = \frac{c}{2}g''(\eta')d_n^2 - f'(x_n)d_n,$$

ahol  $\eta' \in [0, g_1^{-1}(\frac{\lambda}{c})]$ . A 2.2 lemma bizonyításában tett megfontolásokhoz hasonlóan viszont

$$\lambda \leq \lambda^* = M + c \cdot g \left( g'^{-1} \left( -\frac{M_1}{c} \right) \right) = K \cdot c,$$

amiből  $g_1$  monotonitása miatt

$$\eta' \in \left[ 0, g_1^{-1} \left( \frac{\lambda}{c} \right) \right] \subseteq \left[ 0, g_1^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{c} \right) \right].$$

Tehát a tételünk feltételei alapján  $g''(\eta') \leq Q_2$  teljesül. Másrészt

$$0 \neq -f(x_n) = f(\alpha) - f(x_n) = f'(\xi)(\alpha - x_n) = f'(\xi) \cdot e_n,$$

ahol  $\xi \in (x_n, \alpha)$ . Ebből viszont

$$e_{n+1} = e_n - d_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\xi)} - d_n$$

adódik. Innen

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &= \left| -\frac{c}{2} \cdot \frac{g''(\eta')}{f'(\xi)} d_n^2 + \frac{f'(x_n)}{f'(\xi)} d_n - d_n \right| \leq \\ &\leq \frac{c}{2} \cdot \frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|} |d_n|^2 + \frac{|f'(x_n) - f'(\xi)|}{|f'(\xi)|} |d_n| = \\ &= \frac{c}{2} \cdot \frac{g''(\eta')}{|f'(\xi)|} |d_n|^2 + \frac{|f''(\tau)| |(\xi - x_n)|}{|f'(\xi)|} |d_n|, \end{aligned}$$

ahol  $\tau \in (x_n, \xi)$ . De a tétel feltételei miatt  $\xi \in (x_n, \alpha)$ -ra  $0 < m_1 \leq |f'(\xi)|$ , a 2.1. feltevések miatt pedig  $|f''(\tau)| \leq M_2$ ,  $\tau \in (x_n, \xi)$ . Így

$$|e_{n+1}| \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} |\xi - x_n| |d_n|.$$

Figyelembe véve még a  $|d_n| \leq |e_n|$  és  $|\xi - x_n| < |e_n|$  relációkat az

$$|e_{n+1}| \leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |e_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} |e_n|^2 = (T + L_2) |e_n|^2$$

hibabecslés adódik. Ha pedig a

$$\begin{aligned} |\xi - x_n| < |e_n| &= \frac{|f(x_n)|}{|f'(\xi)|} \leq \\ &\leq \frac{1}{|f'(\xi)|} \left( \frac{c}{2} \cdot g''(\eta') |d_n|^2 + |f'(x_n)| |d_n| \right) \leq \\ &\leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 + \frac{M_1}{m_1} |d_n| \end{aligned}$$

relációt használjuk fel, akkor az

$$\begin{aligned} |e_{n+1}| &\leq \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 + \frac{M_2}{m_1} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{Q_2}{m_1} |d_n|^2 |d_n| + \frac{M_2}{m_1} \cdot \frac{M_1}{m_1} |d_n| |d_n| = \\ &= TL_2 |d_n|^3 + (T + L_1 L_2) |d_n|^2 \end{aligned}$$

becslést kapjuk. Az  $\alpha - x_0$  és  $f(x_0)$  értékek előjeleivel kapcsolatos további esetekben a bizonyítás hasonló.

Megjegyezzük, hogy  $c = \frac{M_2}{q_2}$  esetén a hibabecslés ugyanaz, mint Szabó Z. [3] cikkében.

**TÉTEL 2.3.** Az érintő-konvexfüggvények módszere egyszeres zérushely esetén másodrendű és optimális.

*Bizonyítás.* Tekintettel arra, hogy egyszeres zérushelyek esetén az iterációs eljárásunk hibabecslése  $|e_{n+1}| \leq \rho \cdot |e_n|^2$ ,  $\rho < \infty$  alakú, konvergenciarendje legalább 2. Másrészt J. F. Traubnak [4] az információs hatékonyságra vonatkozó alaptétele szerint a konvergenciarend nem lehet nagyobb, mint az egy lépésben kiszámításra kerülő új  $f^{(j)}(x_i)$  függvényértékek száma, ami itt szintén 2. Következésképpen a konvergenciarend 2, és az információs hatékonyság 1, azaz a módszer optimális.

### 3. Konkrét iterációs alapfüggvények

Válasszunk ki néhány, a 2.2 feltételeknek eleget tevő konvex függvényt, és nézzük meg, milyen iterációt generálnak.

Vizsgáljuk meg először a  $g(x) = x^2$ ,  $x \in R$  függvényt. Ekkor  $Q = \infty$ ,  $Q_1^* = \infty$  és  $q_2 = 2$ . Így ha  $c \geq \frac{M_2}{2}$ , akkor teljesülnek a 2.1 tétel  $g$ -re vonatkozó feltételei. Figyelembe véve, hogy  $g_r^{-1}(y) = r\sqrt{y}$ , és  $g'^{-1}(y) = \frac{1}{2}y$ , a  $c = \frac{M_2}{2}$  választással azt kapjuk, hogy

$$F_P(x; r) = x + s \frac{f'(x)}{M_2} + r \sqrt{2 \frac{|f(x)|}{M_2} + \frac{f'^2(x)}{M_2^2}},$$

mely éppen a Szabó Z. által [2]-ben vizsgált érintőparabola-módszer.

Induljunk ki másodjára a  $g(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$ ,  $x \in R$  konvex függvényből. Ez a függvény a Szabó Z. által [2]-ben megadott feltételeket nem teljesíti, tehát ezzel új érintőkonvexfüggvény-módszert generálhatunk. Most  $Q = \infty$  és  $Q_1^* = 1$  lesznek. Amennyiben  $c > M_1$ , a

$$g''(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

függvény alsó korlátja a 2.1. lemmában megkövetelt  $[-d-D, d+D]$  intervallumban

$$q_2 = \frac{1}{\sqrt{(1+(d+D)^2)^3}},$$

ahol  $d \doteq b - a$  és  $D \doteq \frac{M_1}{\sqrt{c^2 - M_1^2}}$ . Ha most  $c$ -t úgy választjuk, hogy  $c \geq \max(\sqrt{2}M_1, \sqrt{(d^2 + 2d + 2)^3}M_2)$ , akkor teljesülnek a 2.1 tétel  $g$ -re vonatkozó feltételei. És mivel  $g_r^{-1} = r\sqrt{y(y+2)}$ , és  $g'^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ , kapjuk az

$$F_H(x; r) = x + s \frac{f'(x)}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} + r \sqrt{\left( \frac{|f(x)|}{c} + \frac{c}{\sqrt{c^2 - f'^2(x)}} \right)^2 - 1}$$

iterációs alapfüggvényt, mely éppen a Szabó Z. által [2]-ben előállított érintőhiperbola-módszer.

Tekintsük most a  $g(x) = ch(x) - 1$ ,  $x \in R$  függvényt. Ekkor  $Q = \infty$ ,  $Q_1^* = \infty$  és  $q_2 = 1$ . Ha most  $c \geq M_2$ , akkor teljesülnek a 2.1 tétel  $g$ -re vonatkozó feltételei. Figyelembe véve, hogy  $g_r^{-1}(y) = arch(1 + y)$  és  $g'^{-1}(y) = arsh(y)$ , a  $c = M_2$  választással az

$$F_{Ch}(x; r) = x + arsh\left(s \frac{f'(x)}{M_2}\right) + arch\left(\frac{|f(x)|}{M_2} + ch\left(arsh\left(-s \frac{f'(x)}{M_2}\right)\right)\right)$$

iterációs alapfüggvényt kapjuk.

#### 4. Néhány alkalmazás

Az érintő-konvexfüggvények módszere igen jól alkalmazható a műszaki- és természettudományok matematikai modelljeiben fellépő nemlineáris egyenletek megoldására. Ezen egyenletek megoldásai közül ugyanis sokszor csak a valós, pozitív, a probléma jellege által meghatározott felső korlátnál kisebb gyöknek feleltethető meg reális tartalom. Vizsgáljunk most meg néhány konkrét alkalmazási lehetőséget! A feladatokat Bálint E. [1] könyvéből válogattuk, és a szükséges számításokat Maple-ben írt programok segítségével végeztük el.

1. Feladat: Egy gömb alakú víztartály belső sugara  $r = 4.75m$ . Milyen magas benne a vízállás, ha éppen  $400m^3$  vizet tartalmaz?

Megoldás. Jelöljük a vízállás magasságát  $x$ -szel. Ekkor

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{3}\pi(2r - x)^2(3r - (2r - x)) = \frac{\pi}{3}x^2(3r - x)$$

a vízzel töltött térfogat, tehát a

$$\frac{\pi}{3}x^2(3 \cdot 4.75 - x) = 400$$

egyenletet kell megoldani az  $I = [0; 9.5]$  intervallumban. Azaz meg kell keresni az

$$f(x) = x^3 - 14.25x^2 + \frac{1200}{\pi}$$

függvény  $I$ -beli gyökét. Mivel

$$f'(x) = 3x^2 - 28.5x \text{ és } f''(x) = 6x - 28.5,$$

így  $M_1 = 67.6875$ , és  $M_2 = 28.5$ . Kindulva az  $x_0 = 9.5$  kezdőpontból, alkalmazva az  $x_{n+1} = F_H(x_n; -1)$  iterációt az 1. ábrán szemléltetett módon közelítjük a gyököt, és a következő iterációs sorozatot kapjuk:

$x_0$	9.5
$x_1$	8.53555919051175
$x_2$	7.90243649410439
$x_3$	7.61988609683528
$x_4$	7.55499166141427
$x_5$	7.55126067377093
$x_6$	7.55124812394635
$x_7$	7.55124812380420

2. Feladat: Nagyfeszültségű vezetékeknek falakon való átvezetéséhez cső alakú szigetelőtesteket használnak. A cső belsejét az áramvezető fémrúd tölti ki, külső palástját fémhenger borítja, mely a tartószerkezethez van erősítve. A szigetelőtestben keletkező télerősség a belső hengerpaláston a legnagyobb ( $E_0$ ). A külső és belső hengerpalást közti feszültség

$$U = E_0 \cdot r \ln \frac{R}{r},$$

ahol  $R$  a külső,  $r$  pedig a belső hengerpalást sugara ( $0 < r < R$ ). Adott  $U$  feszültség és  $E_0$  maximális télerősség mellett számítsuk ki azt az  $x = \frac{R}{r}$  hányadost, melynél a szigetelőtest  $K = \pi(R^2 - r^2)$  keresztmetszete a legkisebb!

Megoldás. A  $K = K(x) = \pi r^2(x^2 - 1)$  egyenlőségből küszöböljük ki  $r$ -et az  $U$ -ra adott összefüggés felhasználásával:

$$K(x) = \frac{U^2 \pi}{E_0^2} \cdot \frac{x^2 - 1}{(\ln x)^2}.$$

A keresztmetszetnek azon  $x$  értékre lehet minimuma, melyre  $K'(x) = 0$ , azaz

$$\frac{x}{(\ln x)^2} - \frac{x^2 - 1}{x(\ln x)^3} = 0.$$

Meg kell tehát keresni az

$$f(x) = x^2 \ln x - x^2 + 1$$

függvény 1-nél nagyobb valós zérushelyeit. Ebből a célból képezzük az

$$f'(x) = 2x \ln x - x \text{ és } f''(x) = 2 \ln x + 1$$

deriváltakat. Mivel

$$f(\sqrt{e}) = 1 - \frac{e}{2} < 0 \text{ és } f(e) = 1,$$

továbbá

$$f'(x) \geq 0 \text{ és } f''(x) > 0, \text{ ha } x \geq \sqrt{e},$$

az  $f$  függvénynek egyetlen (1-nél nagyobb) zérushelye az  $I = [\sqrt{e}, e]$  intervallumba esik, továbbá  $M_2 = f''(e) = 3$ . Az  $x_0 = \sqrt{e}$  kezdőértékből indulva az  $x_{n+1} = F_P(x_n; 1)$  iterációval az alábbi iterációs sorozatot kapjuk, és a 2. ábra szemlélteti a közelítés módját.

$x_0$	1.64872127070013
$x_1$	2.13803433628597
$x_2$	2.21736736725410
$x_3$	2.21845730633078
$x_4$	2.21845748991670

3. Feladat: Egy körtárcsa  $AB$  húrja  $12\text{cm}$ . Az  $AB$  körív felezőpontja legyen  $C$ . Az  $AC$  ív  $C$ -től kezdve az  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  egyenlő részívekre van osztva. Ezek merőleges vetülete az  $AB$  húron az  $a'_1, a'_2, \dots, a'_{100}$  szakaszok. Mekkora a körtárcsa sugara, ha  $a'_{100} = 0.9a'_1$ ?

Megoldás. Az  $AC = BC$  ívekhez tartozó középponti szög legyen  $x$ , a körtárcsa sugara pedig  $r$ . Ekkor

$$a'_1 = r \cdot \sin 0.01x \text{ és } a'_{100} = r \cdot \sin x - r \cdot \sin 0.99x.$$

A megoldandó egyenlet

$$\sin x - \sin 0.99x = 0.9 \sin 0.01x,$$

ami átalakítva

$$\sin x \tan \frac{x}{200} + \cos x - 0.9 = 0.$$

Keressük tehát az

$$f(x) = \sin x \tan \frac{x}{200} + \cos x - 0.9$$

függvény  $I = [0; \frac{\pi}{2}]$  intervallumba eső gyökeit. Mivel

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\sin x \tan \frac{x}{200} + \frac{\cos x}{100 \cos^2 \frac{x}{200}} + \frac{\sin x \sin \frac{x}{200}}{20000 \cos^3 \frac{x}{200}} - \cos x = \\ &= \cos x \left( \frac{1}{100 \cos^2 \frac{x}{200}} - 1 \right) + \sin x \tan \frac{x}{200} \left( \frac{1}{20000 \cos^2 \frac{x}{200}} - 1 \right) \doteq \end{aligned}$$

$\doteq S_1 T_1 + S_2 S_3 T_2$ , és  $x \in I$ , így egyrészt  $T_1 \in [-0.99, -0.98]$ , azaz  $S_1 T_1 \in [-0.99, 0]$ , másrészt  $T_2 \in [-0.99995, -0.99994]$  és  $S_2 S_3 \in [0, 0.008]$ , tehát  $S_2 S_3 T_2 \in [-0.008, 0]$ . Végül is  $f''(x) = S_1 T_1 + S_2 S_3 T_2 \in [-0.998, 0]$ , azaz  $|f''(x)| \leq 0.998 < 1 = M_2$ . Az  $x_0 = 0$  kezdőértékből indulva az  $x_{n+1} = F_{Ch}(x_n; 1)$  iterációval a 3. ábrán látható módon közelítünk, és az iterációs sorozatot az alábbi táblázat mutatja. A kérdéses sugár tehát  $r = 13.7007138832927\text{cm}$ .

$x_0$	0.0
$x_1$	0.443568254385115
$x_2$	0.453277504423438
$x_3$	0.453298607982430
$x_4$	0.453298608084593

Megjegyezzük, hogy a Newton-Raphson-iterációt az említett feladatok megoldása során az adott kezdőpontokból egyik esetben sem indíthattuk, mert mindhárom alkalommal  $f'(x_0) = 0$  volt.



### 5. Összehasonlító, értékelő megjegyzések

Lehetőségünk van a vizsgált másodrendű iterációk gyorsaságának összehasonlítására is az aszimptotikus hibakonstans segítségével. J. F. Traub [4] alapján a másodrendű iterációs eljárásaink aszimptotikus hibakonstansának az értéke:

$$C = \frac{1}{2} |F''(\alpha)|.$$

Szabó Z. kiszámolta az érintőparabola- és érintőhiperbola-módszerek esetén ezeket az értékeket, melyek az iterációs alapfüggvények azonosságai miatt az  $F_P(x; r)$  és  $F_H(x; r)$  iterációink aszimptotikus hibakonstansai. Alakjuk egyszeres  $\alpha$  zérushely esetén:

$$C = \frac{\lambda + s f''(\alpha)}{2 |f'(\alpha)|},$$

ahol

$$\lambda_P = M_2 \text{ és } \lambda_H = \frac{\sqrt{(c^2 - f'^2(\alpha))^3}}{c^2}.$$

Számoljuk most ki az  $F_{Ch}(x)$  iterációs alapfüggvény esetén is az aszimptotikus hibakonstans értékét. Bevezetve a

$$h(x) \doteq \frac{f(x)}{M_2}, \quad k(x) \doteq \sqrt{h'^2(x) + 1} \text{ és } l(x) \doteq \sqrt{(s \cdot h(x) + k(x))^2 - 1}$$

jelöléseket kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} F''_{Ch}(x) &= s \frac{h'''(x)}{k(x)} - s \frac{h''^2(x) h'(x)}{k^3(x)} + \\ &+ \left( s \cdot h'(x) - \frac{h'^2(x) h''^2(x)}{k^3(x)} + \frac{h''^2(x)}{k(x)} + \frac{h'(x) h'''(x)}{k(x)} \right) / l(x) - \\ &- \left( s \cdot h'(x) + \frac{h'(x) h''(x)}{k(x)} \right)^2 (s \cdot h(x) + k(x)) / l^3(x). \end{aligned}$$

Mivel viszont  $l(\alpha) = \sqrt{k^2(\alpha) - 1} = |h'(\alpha)|$  és  $|h'(\alpha)| = -s \cdot h'(\alpha)$ , így

$$\begin{aligned} F''_{Ch}(\alpha) &= s \frac{h'''(\alpha)}{k(\alpha)} - s \frac{h''^2(\alpha) h'(\alpha)}{k^3(\alpha)} + \\ &+ \left( s \cdot h'(\alpha) - \frac{h'^2(\alpha) h''^2(\alpha)}{k^3(\alpha)} + \frac{h''^2(\alpha)}{k(\alpha)} + \frac{h'(\alpha) h'''(\alpha)}{k(\alpha)} \right) / |h'(\alpha)| - \\ &- \left( s \cdot h'(\alpha) + \frac{h'(\alpha) h''(\alpha)}{k(\alpha)} \right)^2 k(\alpha) / |h'(\alpha)|^3 = \\ &= - \frac{s \cdot h''(\alpha) + \sqrt{h'^2(\alpha) + 1}}{|h'(\alpha)|}. \end{aligned}$$

Tehát itt is

$$C_{Ch} = \frac{\lambda + s \cdot f''(\alpha)}{2|f'(\alpha)|},$$

ahol  $\lambda = \sqrt{M_2^2 + f'^2(\alpha)}$ . Világos, hogy ugyanazon egyszeres zérushely esetén  $C_P < C_H$  és  $C_P < C_{Ch}$ , tehát a három iteráció közül az érintőparabola-módszer a leggyorsabb. Szemléltetésül keressük meg az  $f(x) = e^x - x^2 + 1$  függvény  $I = [-2, 0]$ -beli gyökét  $10^{-14}$  pontossággal az  $x_0 = 0$  kezdőpontból kiindulva mindhárom iteráció segítségével. Eredményül az alábbi táblázatban látható közelítő sorozatokat kapjuk, ami várakozásunknak megfelelően az érintőparabola-módszer esetén a legrövidebb.

	$F_P(x, -1)$	$F_H(x, -1)$	$F_{Ch}(x, -1)$
$x_0$	0.0	0.0	0.0
$x_1$	-1.0	-0.66185684867425	-0.90135948401942
$x_2$	-1.14632066864340	-1.02796790825132	-1.13200393779173
$x_3$	-1.14775750665151	-1.13764656733112	-1.14768219253537
$x_4$	-1.14775763214474	-1.14767343120359	-1.14775763039385
$x_5$		-1.14775762620651	-1.14775763214474
$x_6$		-1.14775763214474	

Végül foglaljuk össze az érintőkonvexfüggvény-módszerek előnyös tulajdonságait:

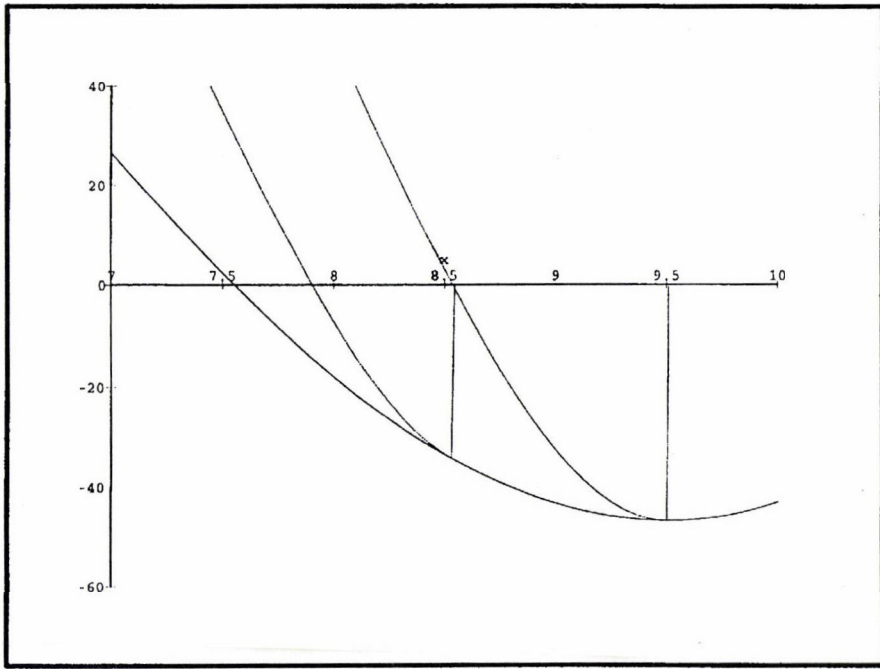
- az  $x_0 \in I$  kezdőérték választásától függetlenül mindig konvergensek;
- másodrendűek és optimálisak;
- ha  $I$  korlátos, az  $f$  függvény összes  $\alpha \in I$  zérushelye meghatározható segítségükkel;
- könnyen programozhatóak.

Hátrányuk, hogy ismerni kell az 2.1. feltételben szereplő korlátok értékeit.

#### IRODALOM

- [1] BÁLINT, E., *Közelítő matematikai módszerek műszaki feladatokkal*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1966..
- [2] SZABÓ, Z., „Über gleichungslösende Iterationen ohne Divergenzpunkt I-II-III”, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 27 (1980), 185-200.
- [3] SZABÓ, Z., „Verschärfungen der Sätze über die Methode der konvexen Berührungsfunktionen ohne Divergenzpunkt”, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* (1983), 243-248.
- [4] TRAUB, J.F., *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice Hall, Englewood Cliffs N.J., 1964.
- [5] VÁRTERÉSZ, M., „On always convergent methods of tangential convex functions for the solution of nonlinear equations”, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)* 32 (1985), 255-265, (in Russian).

(Beérkezett: 1997. július 28.)



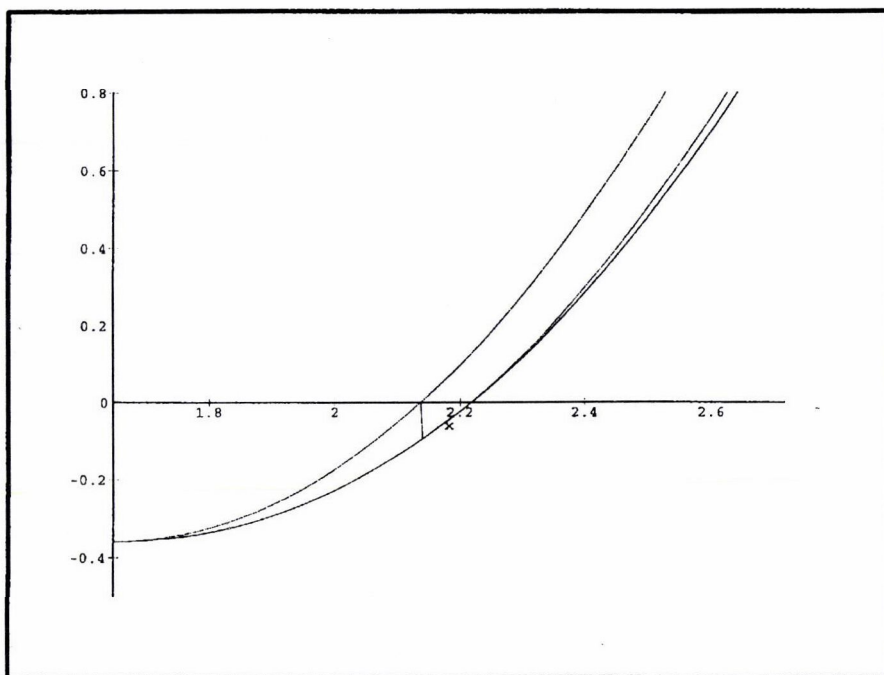
1. ábra

VÁRTERÉSZ MAGDA  
 KOSSUTH LAJOS TUDOMÁNYEGYETEM  
 MATEMATIKAI ÉS INFORMATIKAI INTÉZET  
 DEBRECEN, PF. 12.  
 E-MAIL: VARTERES@MATH.KLTE.HU

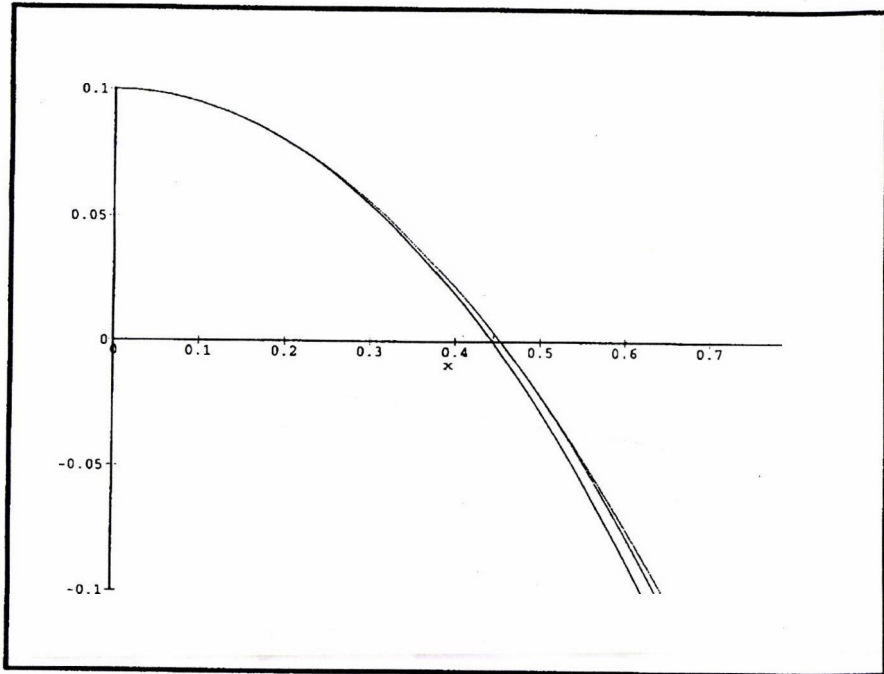
# ITERATIONS GENERATED BY TANGENTIAL CONVEX FUNCTIONS FOR SOLVING EQUATIONS

M. VÁRTERÉSZ

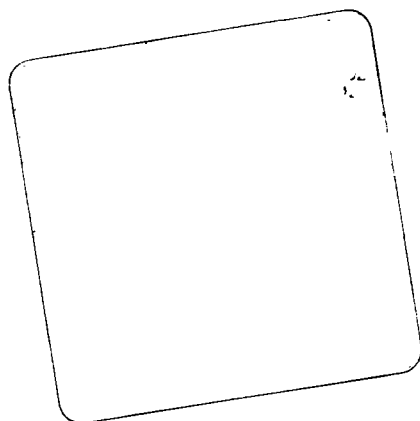
For solving nonlinear equations, Z. Szabó [2, 3] worked out the method based on always convergent iterations generated by tangential conic sections and some tangential convex functions. In [5], generalizing these iterations, a function family consisting of the basic iterating functions was built, whose members are obtained by the help of tangential convex functions, and which give always convergent methods. In this paper the properties and possibilities of application of these iterations are presented.



2. ábra



3. ábra



A kiadásért felelős a BJMT főtákará  
Szedte a KLTE Informatikai és Számítókőzpont Kiadvány Szerkesztő Csoportja  
Nyomta az MSZH Nyomda és Kiadó Kft., Budapest, 99.014  
Felelős vezető: Nagy László  
Budapest, 1999  
Megjelent 18 (A/5) ív terjedelemben  
250 példányban  
HU ISSN 0133-3399

## ÚTMUTATÁS A SZERZŐKNEK

Az Alkalmazott Matematikai Lapok csak magyar nyelvű dolgozatokat közöl. A kéziratok gépelését olyan formában kérjük, hogy minden gépelt oldal 25, egyenként átlag 50 betűhelyes sort tartalmazzon. A közlésre szánt dolgozatokat három példányban kell beküldeni. Előnyben részesülnek a  $\text{\TeX}$ -ben elkészített dolgozatok. Ezeket két kinyomtatott példány kíséretében diszketten kérjük beadni.

A kéziratok szerkezeti felépítésének a következő követelményeket kell kielégíteni. A fejlécnek tartalmaznia kell a dolgozat címét, a szerző teljes nevét, valamint annak a városnak a nevét, ahol a szerző dolgozik. A fejléc után egy, képletet nem tartalmazó, legfeljebb 200 szóból álló kivonatot kell minden esetben megadni. A dolgozatot címmel ellátott szakaszokra kell bontani, és az egyes szakaszokat arab sorszámozással kell ellátni. Az esetleges bevezetésnek mindig az első szakaszt kell alkotnia. Az irodalomjegyzék mindig az utolsó szakasz kell, hogy legyen, és azt sorszámmal nem kell ellátni. Az irodalomjegyzék után, a kézirat befejezéseképpen fel kell tüntetni a szerző teljes nevét és a munkahelye (illetve lakása) pontos postai címét. A dolgozatban előforduló képleteket szakaszonként újrakezdődően, a képlet előtt két zárójel közé írt kettős számozással kell azonosítani. Természetesen nem szükséges minden képletet számozással ellátni. Az esetleges definíciókat és tételeket (segéd tételeket és lemmákat) ugyancsak szakaszonként újrakezdődően, kettős számozással kell ellátni. Kérjük a szerzőket, hogy ezeket, valamint a tételek bizonyítását a szövegben kellő módon emeljék ki. Minden dolgozathoz csatolni kell egy angol, német, francia vagy orosz nyelvű, külön oldalra gépelt összefoglalót. Amennyiben lehetséges, kérjük a nyomtatás számára különösen nehézkes matematikai jelölések használatának az elkerülését.

A dolgozatok ábráit és az esetleges lábjegyzeteket a dolgozat végén, különálló lapokon kérjük beküldeni. Mind az ábrákat, mind a lábjegyzeteket a dolgozat szakaszokra bontásától független, folytatólagos arab sorszámozással kell ellátni. Az ábrák elhelyezését a dolgozat megfelelő helyén, széljegyzetként feltüntetett, ábraazonosító sorszámokkal kell megadni. A lábjegyzetekre a dolgozaton belül az azonosító sorszám felső indexkénti használatával lehet hivatkozni.

Az irodalmi hivatkozások formája a következő. Minden hivatkozást fel kell sorolni a dolgozat végén található irodalomjegyzékben, a szerzők, illetve a társszerzők esetén az első szerző neve szerinti alfabetikus sorrendben úgy, hogy a cirill betűs szerzők nevét a Mathematical Reviews átirási szabályai szerint latin betűsre kell átírni. A folyóiratban megjelenő cikkekre [1], a könyvekre [5], a kötetben megjelent dolgozatokra [4], a disszertációkra [3] és a gépi program leírásokra [2] a következő minta szerint kell hivatkozni:

[1] Farkas, J., Über die Theorie der einfachen Ungleichungen, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **124** (1902) 1–27.

[2] Kéri, G., "DUALSIMP", rutin a CDC 3300-as gépekre (Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutató Intézete, CDC 3300 felhasználói ismertetők 2. 1973. május) 19–20.

[3] Prékopa, A., "Sztochasztikus rendszerek optimalizálási problémáiról", doktori értekezés. Magyar Tudományos Akadémia, Budapest, 1970.

[4] Prabhu, N. U., "Recent research on the ruin problem of collective risk theory", in: *Inventory Control and Water Storage* Ed. A. Prékopa (János Bolyai Mathematical Society and North-Holland Publishing Company, Amsterdam-London, (1973) 221–228.

[5] Zoutendijk, G., *Methods of Feasible Directions* (Elsevier Publishing Company, Amsterdam and New York, 1960).

A dolgozatok szövegében az irodalmi hivatkozás számait szögletes zárójelben kell megadni, mint például [5] vagy [4, 76–78]. A szerzők a dolgozatukról 50 darab ingyenes különlenyomatot kapnak. A dolgozatok után szerzői díjat az Alkalmazott Matematikai Lapok nem fizet.

## TARTALOMJEGYZÉK

<i>Gyires Béla</i> , A kettősen sztochasztikus matrixokra vonatkozó van der Waerden sejtés elemi bizonyítása .....	3
<i>László Ákos</i> , Kvadratikus Ljapunov-függvények időállandói .....	11
<i>Szentkúti Zsolt</i> , Periodikus megoldások May-Leonard típusú populációdinamikai modellekben .. 23	
<i>A. Habib és Szántai Tamás</i> , Új korlátok a speciális "consecutive $k$ -out-of- $r$ -from- $n$ : F" rendszer megbízhatóságára .....	39
<i>Szilágyi Péter</i> , A lineáris alternatíva-, egzisztencia- és dualitási tételek ekvivalenciája .....	63
<i>Szilágyi Péter</i> , Inhomogén lineáris alternatíva-tételek .....	75
<i>Fábián Csaba</i> , Az üvegszál anyaghibáinak valószínűségi modellezése .....	91
<i>Nagy Gyula</i> , Szabályos rácsszerkezetek átlós merevítése síkban .....	101
<i>Achs Ágnes és Kiss Attila</i> , A Datalog fuzzy kiterjesztése .....	111
<i>Rázga Tamás</i> , A természetes számok Peano aritmetikát is vitató új, általános elmélete .....	139
<i>Fazekas Attila</i> , Vázkijelölő algoritmusok a digitális képfeldolgozásban .....	155
<i>Kovács Attila</i> , Komputeralgebra a tudományokban és a gyakorlatban .....	181
<i>Csörnyei Zoltán</i> , Az assemblálás elmélete .....	203
<i>Várterész Magdolna</i> , Érintő-konvexfüggvényekkel generált egyenletmegoldó iterációk .....	219

## INDEX

<i>Gyires, B.</i> , Elementary proof of Van der Waarden's conjecture on doubly stochastic matrices .. 3	
<i>László, Á.</i> , Time-constants for the quadratic Lyapunov-functions .....	11
<i>Szentkúti, Zs.</i> , Periodic Solutions of Non-symmetric May-Leonard Systems .....	23
<i>Habib, A. and Szántai, T.</i> , New bounds on the reliability of the consecutive $k$ -out-of- $r$ -from- $n$ : FF system .....	39
<i>Szilágyi, P.</i> , Equivalence of the linear alternative, existence and duality theorems .....	63
<i>Szilágyi, P.</i> , Nonhomogeneous Linear Theorems of the Alternative .....	75
<i>Fábián, Cs.</i> , Statistical characterization of defective sections in a length of fiberglass .....	91
<i>Nagy, Gy.</i> , The rigidity of regular gride framework on plane .....	101
<i>Achs, Á. and Kiss, A.</i> , Fuzzy extension of Datalog .....	111
<i>Rázga, T.</i> , A new, general theory of natural numbers, disputing even the Peano arithmetic ..	139
<i>Fazekas, A.</i> , Skeletonization in digital picture processing .....	155
<i>Kovács, A.</i> , Computer algebra in science and practice .....	181
<i>Csörnyei, Z.</i> , The theory of assemblers .....	203
<i>Várterész, M.</i> , Iterations generated by tangential convex functions for solving equations ...	219